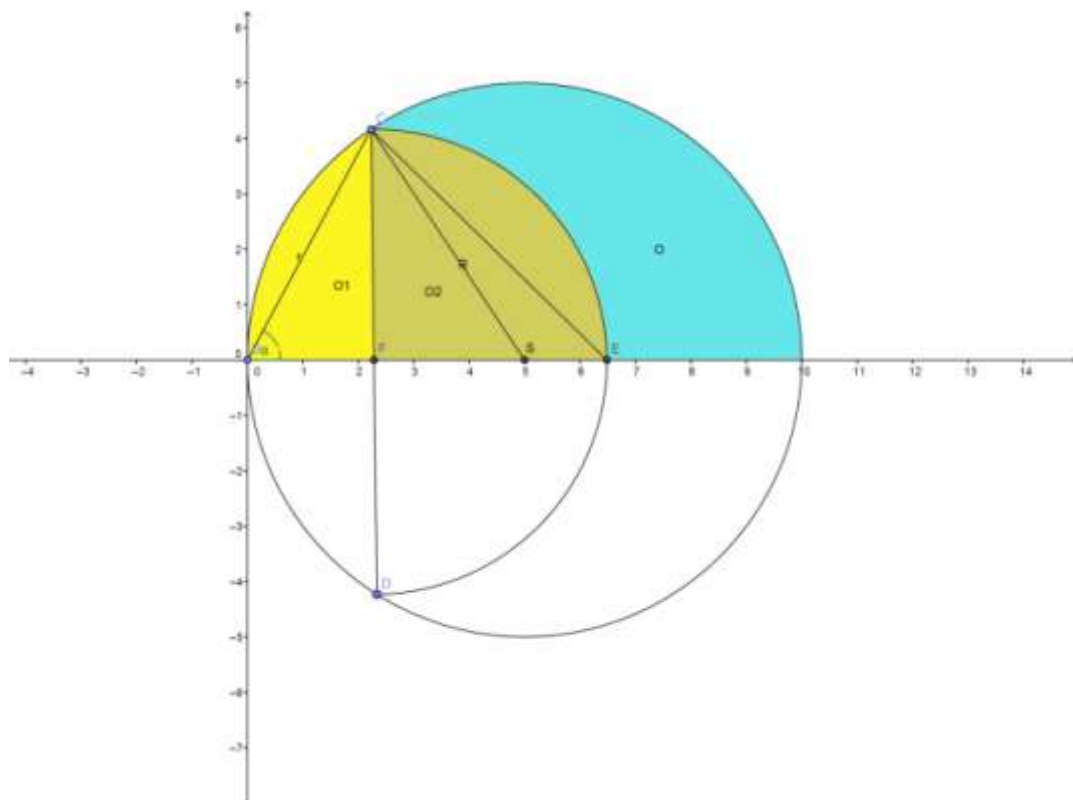


Palouk a koza

Zadání:

Na jak dlouhý provaz musíme uvázat kozu, aby vypásla přesně polovinu kruhového oblouku. Kozu je uvázána ke kolíku na obvodu palouku.



Kružnice k_1 má střed v bodě O a poloměr r , kružnice k_2 má střed v bodě S a poloměr R .

Vzhledem k symetrii podle osy x platí:

$$O_1 + O_2 = O$$

Obecná rovnice kružnice se středem o souřadnicích $[a,b]$:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Kružnice k_1 se středem $[0,0]$ a poloměrem r má analytické vyjádření (pro $y \geq 0$):

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

Kružnice k_2 se středem $[R,0]$ a poloměrem R má analytické vyjádření (pro $y \geq 0$):

$$(x - R)^2 + y^2 = R^2$$

$$y = \sqrt{R^2 - (x - R)^2}$$

Vyjádření obsahu útvarů pomocí určitých integrálů:

Obsah O_1 (žlutá část):

$$O_1 = \int_0^z \sqrt{R^2 - (x - R)^2} dx$$

Obsah O_2 (okrová část)

$$O_2 = \int_z^r \sqrt{r^2 - x^2} dx$$

kde z je souřadnice bodu F (velikost úsečky OF) a z pravoúhlých trojúhelníků OFC a FEC a ze společné odvěsny FC plyne z Pythagorovy věty:

$$r^2 - z^2 = R^2 - (R - z)^2$$

$$r^2 - z^2 = R^2 - R^2 + 2Rz - z^2$$

$$r^2 = 2Rz$$

$$z = \frac{r^2}{2R}$$

$$\int_0^{\frac{r^2}{2R}} \sqrt{R^2 - (x - R)^2} dx + \int_{\frac{r^2}{2R}}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx = \frac{\pi R^2}{4}$$

Poněvadž se nám jedná pouze o vzájemný poměr r/R , zavedeme parametry $p = r/R > 1$ a integrační proměnnou $v = x/R$, pro meze určitého integrálu pak platí $m' = m/R$.

$$\frac{(pR)^2}{2R^2} \int_0^{\frac{(pR)^2}{2R^2}} \sqrt{R^2 - (vR - R)^2} dv + \int_{\frac{(pR)^2}{2R^2}}^p \sqrt{(pR)^2 - (vR)^2} dv = \frac{\pi R^2}{4}$$

$$\frac{p^2}{2} \int_0^{\frac{p^2}{2}} R \sqrt{R^2 - R^2(v-1)^2} dv + \int_{\frac{p^2}{2}}^p R \sqrt{R^2 p^2 - R^2 v^2} dv = \frac{\pi R^2}{4}$$

$$\frac{p^2}{2} \int_0^{\frac{p^2}{2}} R^2 \sqrt{1 - (v-1)^2} dv + \int_{\frac{p^2}{2}}^p R^2 \sqrt{p^2 - v^2} dv = \frac{\pi}{4} R^2$$

$$\frac{p^2}{2} \int_0^{\frac{p^2}{2}} \sqrt{1 - (v-1)^2} dv + \int_{\frac{p^2}{2}}^p \sqrt{p^2 - v^2} dv = \frac{\pi}{4}$$

$$\int_{\frac{p^2}{2}}^p \sqrt{p^2 - v^2} dv = \left| c = \frac{v}{p} \right| = p^2 \int_{\frac{p}{2}}^1 \sqrt{1 - c^2} dc$$

Tedy výsledná rovnice, kterou budeme řešit je:

$$\frac{p^2}{2} \int_0^{\frac{p^2}{2}} \sqrt{1 - (v-1)^2} dv + p^2 \int_{\frac{p}{2}}^1 \sqrt{1 - c^2} dc = \frac{\pi}{4}$$

Výrazy integrujeme, uvedené integrály jsou tabulkové integrály:

I.

$$\frac{p^2}{2} \int_0^{\frac{p^2}{2}} \sqrt{1 - (v-1)^2} dv = |v-1=x| = \int_0^{\frac{p^2}{2}-1} \sqrt{1-x^2} dx = \left[\frac{1}{2} (x\sqrt{1-x^2}) + \frac{1}{2} \arcsin x \right]_0^{\frac{p^2}{2}-1}$$

$$= \left[\frac{1}{2} \left((v-1) \sqrt{1-(v-1)^2} \right) + \frac{1}{2} \arcsin(v-1) \right]_0^{\frac{p^2}{2}} = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{p^2}{2} - 1 \right) \sqrt{1 - \left(\frac{p^2}{2} - 1 \right)^2} \right) + \frac{1}{2} \arcsin \left(\frac{p^2}{2} - 1 \right) + \frac{\pi}{4}$$

II.

$$\begin{aligned} p^2 \int_{\frac{p}{2}}^1 \sqrt{1-c^2} dc &= p^2 \left[\frac{1}{2} \left(c \sqrt{1-c^2} + \arcsin c \right) \right]_{\frac{p}{2}}^1 = \\ &= p^2 \frac{1}{2} \left(1 \sqrt{1-1^2} + \arcsin 1 \right) - p^2 \frac{1}{2} \left(\frac{p}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{p}{2} \right)^2} + \arcsin \frac{p}{2} \right) = \\ &= \frac{\pi p^2}{4} - \frac{p^3}{4} \sqrt{1 - \frac{p^2}{4}} - \frac{p^2}{2} \arcsin \frac{p}{2} \end{aligned}$$

Tedy po integraci dostáváme rovnici s neznámou p:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\left(\frac{p^2}{2} - 1 \right) \sqrt{1 - \left(\frac{p^2}{2} - 1 \right)^2} \right) + \frac{1}{2} \arcsin \left(\frac{p^2}{2} - 1 \right) + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi p^2}{4} - \frac{p^3}{4} \sqrt{1 - \frac{p^2}{4}} - \frac{p^2}{2} \arcsin \frac{p}{2} &= \frac{\pi}{4} \\ \frac{1}{2} \left(\frac{p^2}{2} - 1 \right) \sqrt{1 - \left(\frac{p^2}{2} - 1 \right)^2} + \frac{1}{2} \arcsin \left(\frac{p^2}{2} - 1 \right) - \frac{p^2}{2} \arcsin \frac{p}{2} + \frac{\pi p^2}{4} - \frac{p^3}{4} \sqrt{1 - \frac{p^2}{4}} &= 0 \end{aligned}$$

Rovnici lze částečně upravit:

$$\begin{aligned} 2 \left(\frac{p^2}{2} - 1 \right) \sqrt{1 - \left(\frac{p^2}{2} - 1 \right)^2} + 2 \arcsin \left(\frac{p^2}{2} - 1 \right) - 2 p^2 \arcsin \frac{p}{2} + \pi p^2 - p^3 \sqrt{1 - \frac{p^2}{4}} &= 0 \\ 2 \arcsin \left(\frac{p^2}{2} - 1 \right) - 2 p^2 \arcsin \frac{p}{2} + 2 \left(\frac{p^2}{2} - 1 \right) \sqrt{1 - \left(\frac{p^2}{2} - 1 \right)^2} - p^3 \sqrt{1 - \frac{p^2}{4}} + \pi p^2 &= 0 \\ 2 \arcsin \left(\frac{p^2}{2} - 1 \right) - 2 p^2 \arcsin \frac{p}{2} + 2 \left(\frac{p^2}{2} - 1 \right) \sqrt{1 - \frac{p^4}{4} + p^2 - 1} - p^3 \sqrt{1 - \frac{p^2}{4}} + \pi p^2 &= 0 \\ 2 \arcsin \left(\frac{p^2}{2} - 1 \right) - 2 p^2 \arcsin \frac{p}{2} + 2 p \left(\frac{p^2}{2} - 1 \right) \sqrt{1 - \frac{p^2}{4}} - p^3 \sqrt{1 - \frac{p^2}{4}} + \pi p^2 &= 0 \\ 2 \arcsin \left(\frac{p^2}{2} - 1 \right) - 2 p^2 \arcsin \frac{p}{2} + \sqrt{1 - \frac{p^2}{4}} \left(2 p \left(\frac{p^2}{2} - 1 \right) - p^3 \right) + \pi p^2 &= 0 \\ 2 \arcsin \left(\frac{p^2}{2} - 1 \right) - 2 p^2 \arcsin \frac{p}{2} + \frac{1}{2} (2 p) \sqrt{4 - p^2} + \pi p^2 &= 0 \\ 2 \arcsin \left(1 - \frac{p^2}{2} \right) + 2 p^2 \arcsin \frac{p}{2} + p \sqrt{4 - p^2} - p^2 \pi &= 0 \end{aligned}$$

Rovnice

$$2p^2 \arcsin\left(\frac{p}{2}\right) + 2 \arcsin\left(1 - \frac{p^2}{2}\right) + p\sqrt{4 - p^2} - p^2\pi = 0$$

je iracionální rovnice, kterou lze řešit s libovolnou přesností iterací (např. v MS EXCEL) na 8 desetinných míst.

Výsledek:

$$p = 1,15872847\dots$$