

Čokoládový problém

Zadání

Určete všechna tři po sobě jdoucí přirozená čísla, jejichž součet třetích mocnin je opět třetí mocnina přirozeného čísla. tj.

v $\mathbb{N}$ řešte rovnici

$$(a-1)^3 + a^3 + (a+1)^3 = n^3$$

Řešení

Pro čísla $a=2$ a $a=3$ ověříme, že takové číslo n neexistuje.

$$1^3 + 2^3 + 3^3 = 1 + 8 + 27 = 36 \quad \text{neexistuje } n^3$$

$$2^3 + 3^3 + 4^3 = 8 + 27 + 64 = 99 \quad \text{neexistuje } n^3$$

$$(a-1)^3 + a^3 + (a+1)^3 = n^3$$

po úpravě

$$a > 3$$

$$3a(a^2 + 2) = n^3$$

tedy musí platit, že jestliže

$$3/n \Rightarrow 3/n^3$$

$$3a(a^2 + 2) = 27k^3$$

$$a(a^2 + 2) = 9k^3$$

Tedy:

$$k^3 / a(a^2 + 2)$$

Nastávají pouze tyto možnosti pro dělení součinu $a(a^2+2)$ ($k>1$, $a>3$)

k^3/a a současně k^3 nedělí a^2+2	$k^3/(a^2+2)$ a k^3 nedělí a	k^2/a a současně $k/(a^2+2)$	k/a a současně $k^2/(a^2+2)$
NELZE Důkaz: $a = rk^3$ $rk^3(r^2k^6 + 2) = 9k^3$ $r(r^2k^6 + 2) = 9$ $r^3k^6 + 2r = 9$ <i>ne má řešení pro $k \geq 2$</i> <i>pro $k = 2$ $a = 1$</i> $2^6 + 2 = 66 > 9$	NELZE Důkaz: $a^2 + 2 = rk^3$ $a(a^2 + 2) = ark^3 = 9k^3$ $ark^3 = 9k^3$ $ar = 9$ $r \geq 1 \wedge a > 3$ $a, r \in \mathbb{N}$ <i>ne existuje takové r</i>	LZE $k^2 / a \Rightarrow a = rk^2$ $a^2 + 2 = sk$ $rk^2sk = 9k^3$ $rs = 9$ $r = 1, 3$ $s = 9, 3$ $r = 1 \wedge s = 9$ $r = 3 \wedge s = 3$	NELZE Důkaz: $k / a \Rightarrow k^2 / a^2$ $\wedge$ $k^2 / a^2 + 2$ <i>ne existuje takové k</i> <i>(platí pouze pro $k^2 = 2$)</i>

Tedy:

$$k^2 \mid a \rightarrow k^2 \leq a \rightarrow k^6 \leq a^3$$

$\wedge$

$$a^3 < 9k^3$$

$$k^6 \leq a^3 < 9k^3$$

$$k^3 < 9$$

Řešení :

$$k = 2 \rightarrow n = 6$$

$$3a(a^2 + 2) = 6^3$$

$$a = 4, 8, 12, \dots$$

$$3 < a < n = 6$$

$$a = 4$$

Existuje jediné řešení

$$3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$$