

Dva matematici

Jsou dána dvě přirozená čísla a a b větší než 1. Utvoříme jejich součet $a+b$ a jejich součin $a.b$.

Dva matematici mají za úkol obě čísla najít. Jeden matematik (Adam) zná pouze součin $a.b$, druhý matematik (Bedřich) zná pouze součet $a+b$.

Sledujme jejich rozhovor:

1. Adam: "Nevím, která jsou to čísla."
2. Bedřich: "To jsem věděl."
3. Adam: "A tak já už vím!"
4. Bedřich: "A tak já už vím taky!"

Úkol : Najděte čísla a a b , víte-li že **součin $a.b$ je menší než 100**.

Poznámky:

2. Bedřich snad měl odpovědět „To už jsem věděl napřed“.

Řešení:

Číslo které zná Adam nazveme A , číslo které zná Bedřich nazveme B .

Neznámá dvě čísla označíme X a Y .

Tedy

$$A = X.Y$$

$$B = X+Y$$

První krok

Číslo A , které zná Adam není prvočíslo a číslo A nemůže také být součin právě dvou prvočísel v první mocnině a číslo A nemůže to být 2 ani 3 mocnina jediného prvočísla.

Proč:

- pokud by číslo bylo prvočíslo, pak Adam okamžitě ví, že se jedná o součin prvočísla a jedničky, ale jednička je zakázaná – ohradil by se proti zadání.
- pokud by se jednalo o součin právě dvou prvočísel, pak ví okamžitě řešení
- Pozn.: prvočísla do 100 jsou:
2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43,47,53,59,61,67,71,73,79,83,89,97
- pokud se jedná o druhou mocninu prvočísla, tak odpoví že ví a může tyto čísla napsat.
Jednalo by se o čísla 4, 9, 25, 49
- pokud by se jednalo o třetí mocninu prvočísla pak lze jednoznačně toto číslo rozložit na dvě čísla, jedná se o čísla: 8 a 27

Druhý krok

Číslo Bedřicha B nemůže být sudé číslo – to lze vždy rozložit na součet dvou prvočísel – pak by nemohl B tvrdit s jistotou, že A neví.

Proč:

Pokud s jistotou Bedřich prohlašuje „To jsem věděl“, pak určitě nesmí být číslo B, které dostal sudé, neboť tam by byla možnost, že se jedná o součet dvou prvočísel.

Tedy, aby mohl Bedřich mohl říci „To jsem věděl“, pak se musí jednat o liché číslo.

Stejně tak musíme vyloučit z B všechna čísla, která vzniknou součtem 2 a prvočísla. To by též vedlo k tomu, že by nemohl prohlásit „To jsem věděl“.

Třetí krok

Adam se rozhodl – tedy musel mít jen dvě možnosti k rozhodnutí.

Proč:

Z odpovědi Bedřicha ví, že B nemůže být sudé číslo ani číslo, které vznikne součtem 2 a prvočísla, sám zná číslo A a aby se mohl rozhodnout, pak musí mít právě dvě možnosti.

Dvě možnosti Adam získá pouze tehdy, pokud rozklad čísla A se skládá pouze ze dvou prvočísel, z nichž jedno je ve druhé mocnině.

Ale liché číslo B jako součet dvou čísel je možné získat jen jako součet sudého a lichého čísla.

Zapišeme tuto úvahu přes rozklad čísla A na prvočísla.

$A = (p_1^2) \cdot p_2$... první možnost

$A = (p_1) \cdot (p_1 \cdot p_2)$... druhá možnost

Podmínka je $A < 100$.

k tomuto A pak mohou existovat pouze dva možné součty

$B_1 = p_1^2 + p_2$ je liché číslo a tedy jeden ze sčítanců je sudý a druhý lichý.

B_1 je liché jen v případě

$p_1 = 2$ a $p_2 > 2 \rightarrow B_1 = 4 + p_2$

Pro A pak platí $A = p_1^2 \cdot p_2 = 4 \cdot p_2$

nebo

$p_1 > 2$ a $p_2 = 2 \rightarrow B_1 = p_1^2 + 2$

Pro A pak platí $A = p_1^2 \cdot p_2 = 2 \cdot p_1^2$

Nebo

$B_2 = p_1 + p_1 \cdot p_2 = p_1 \cdot (1 + p_2)$ a jeden ze sčítanců je sudý

B_2 je liché jen v případě

$p_1 > 2$, $p_2 = 2 \rightarrow B_2 = 3p_1$

Pro A pak platí $A = (p_1) \cdot (p_1 \cdot p_2) = p_1 \cdot p_1 \cdot 2 = 2 \cdot p_1^2$

V úvahu tak připadá pouze řešení $A = 4 \cdot p_1$, jinak by nemohl Adam říci, že již ví. V opačném případě, tedy $A = 2 \cdot p_1^2$ by Adam měl stále dvě možnosti.

Adam tedy vydělí svoje číslo A čtyřmi a oznámí, že už ví.

Čtvrtý krok

Bedřich tedy ví, že existuje řešení a stejnou úvahou ví, že součin $A = 4 \cdot p_1$ a může od svého čísla odečíst 4 a dostane také řešení.

Kontrola

Ověřme ještě úvahu Adama.

Tedy $4.p_1$ do 100 jsou čísla 8, 12, 28, 44, 52, 68, 92.

Součty k těmto číslům jsou $4+p_1$ 6, 7, 11, 15, 17, 21, 27.

Takže dvojice čísel X, Y pro něž $B1=4+p_2$ (bez 6 to je sudé)

$$7=4+3$$

$$11=4+7$$

$$15=4+11$$

$$17=4+13$$

$$21=4+17$$

$$27=4+23$$

Vyloučíme také čísla, která jsou součtem 2 a prvočísla (viz druhý krok)

$$7=2+5$$

$$15=2+13$$

$$21=2+19$$

a vyloučíme i čísla 11 a 27:

$11=2+3^2$ (a to nelze neboť součiny $2*9$ a $3*6$ je 18 a A by ve třetím kroku nevěděl)

$27=2+5^2$ (a to také nelze neboť $2*25$ a $5*10$ je 50 a A by ve třetím kroku nevěděl)

Zbývají tedy pro B číslo 17 a tedy pro A číslo 52.

Adam může prohlásit, že zná čísla $X=4$ a $Y=13$.

Další řešení:

<https://forum.matweb.cz/viewtopic.php?id=36466>
