

Fibonacci

Pavel Hrubý

Co je číslo fí?

Vstup do posledního útočiště (děkuji pane Zajdel) byl podmíněn vyřešením některé z automaticky generovaných matematických úloh.

Představte si, stejně jako v knize (kdo nemá rád sci-fi, ať raději dál nečte) Vynález profesora van Troffa se dostáváte před zavřené dveře, za vámi se žene horda útočníků s klacky a provazy, a vy se můžete ukrýt pouze za podmínky, že během minuty (už běží!!!) máte vyřešit problém (to neříkám já, to říká ten automat, který otvírá dveře) : Jaké číslo je řešením rovnice $x=1+1/x$? (v knize jsou ovšem v tomto případě derivace)

Možnosti nejsou dány.

A kde jsme?

Uvnitř x Venku x... NNNN

Problém zavřených dveří řešil již Fibonacci, skutečným jménem Leonardo Pisánský. Dnešním spotřebitelům se trochu plete s Leonardem da Vinci (viz knížka Šifra Mistra Leonarda - *The Da Vinci Code*), což podle původního názvu není divu. Autor této knihy má ovšem jen vysokoškolské vzdělání a je středoškolský matematik a co chcete po matematikovy za znalosti historie...

Čísla mistra Leonarda

Leonardo Fibonacci

Leonardo Fibonacci z Pisy se narodil kolem roku 1170 a jako mladík přijel na otcovo přání do Bugie, aby se naučil aritmetickým postupům. Leonardova studia daleko přesáhla hranice znalostí, které byly v tehdejší době nutné pro obchodníka nebo úředníka. Své matematické znalosti rozšířil při svých cestách do Egypta, Sýrie, Byzance na Sicílii a do Provence. V roce 1202 napsal svou „Knihu o abaku“, kterou roku 1228 značně přepracoval.

Tištěné vydání knihy má 419 stran a obsahuje patnáct kapitol. Tato vynikající kniha byla jedním z nejdůležitějších nositelů nové aritmetiky i dalších matematických znalostí v Evropě. V roce 1220 napsal Praxi geometrie a v roce 1225 Knihu čtverců. Leonardo Pisánský zemřel někdy po roce 1240. Jeho dílo natolik převyšuje celkově nízkou úroveň matematických znalostí jeho současníků, že mohlo mít praktický vliv až o mnoho později, prakticky až po dvou stoletích.

Úloha o králících

Kapitola XII. Knihy o abaku obsahuje velké množství různorodých úloh. Poprvé v dějinách matematiky se zde objevuje sčítání rekurentní posloupnosti. Tato posloupnost se objevuje v úloze o králících.

Znění úlohy je následující. Kolik párů králíků čítají potomci jednoho páru po roce, jestliže se každému páru se každý měsíc narodí pár, který je sám schopný se za měsíc rozmnožovat a jestliže ani jeden pár nezahyne?

Odpověď na tuto otázku je dána součtem posloupnosti $1+2+3+5+8+13+\dots+377$. Každý člen této posloupnosti, kromě prvních dvou, je součtem dvou předcházejících členů, tj. $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$. Posloupnost tedy tvoří čísla 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...

Dnes tuto posloupnost nazýváme Fibonacciho posloupnost a je zvláštním případem posloupností, kdy je následující člen vytvořen lineární kombinací členů předcházejících.

Tato posloupnost je tvořena neustále se zvětšujícími se čísly, je tedy rostoucí a není shora omezená. Roste tedy do nekonečna. Budeme-li zkoumat podíl dvou po sobě jdoucích členů, dojdeme k překvapivému závěru, že tento podíl se blíží určitému číslu.

Tedy poměr prvních dvou členů je $1:1 = 1$, dalších dvou $2:1 = 2$, pak $3:2=1,5$, dále $5:3=1,66$, $8:5 = 1,6$ a tak dále, až například u 40 a 41 členu dostáváme $a_{41} : a_{40} = 165580141 : 102334155 = 1,618033989$ a toto číslo se při výpočtu dalších poměrů na prvních 10 desetinných místech již nemění.

Označíme-li tento poměr ϕ pak pro velká n (n se blíží nekonečnu) platí:

$$\phi = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n + a_{n-1}}{a_n} = 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} = 1 + \frac{1}{\frac{a_n}{a_{n-1}}} = 1 + \frac{1}{\phi}$$

a tedy rovnice

$$\phi = 1 + \frac{1}{\phi}$$

bude mít právě jedno kladné řešení:

$$\phi^2 - \phi - 1 = 0$$

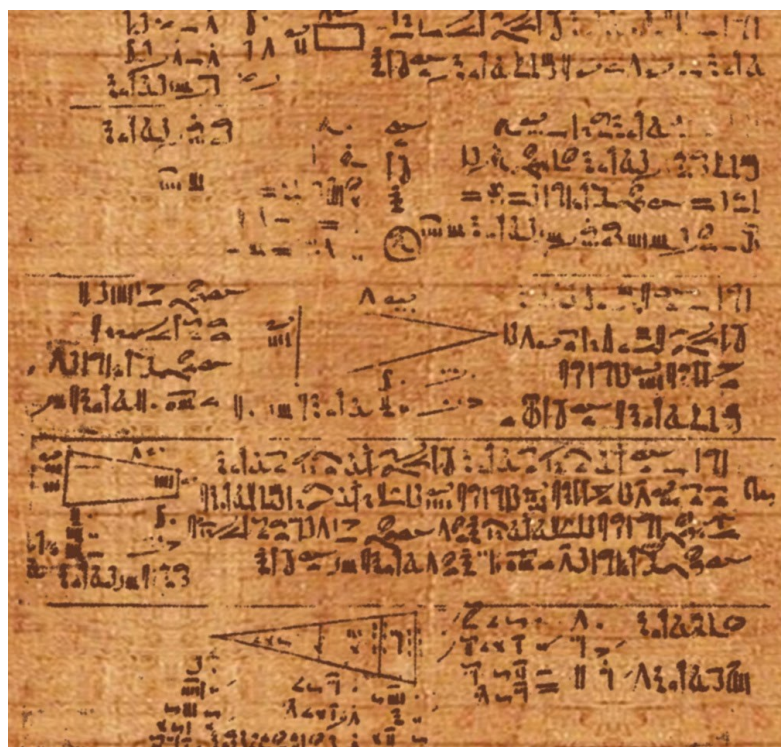
$$\sqrt{D} = \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)} = \sqrt{5}$$

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Toto číslo hraje v uspořádání přírody a v historii lidstva významnou úlohu.

Seqt

V Britském muzeu se nachází papyrus, který je nazýván Ahmesův.



Text v papýru tvrdí, že „v pyramidách je utajen tajemný kvocient, nazvaný seqt“. Tento seqt objevili i pozdější Řekové a Římané. V Deseti knihách o architektuře Vitruvius věnuje tomuto číslu značnou pozornost a dokazuje použití tohoto čísla v mnohých antických stavbách. Starořeční architekti Itkinos a Kalikrates je využili při stavbě chrámu Parthenónu na Akropoli v Athénách, nejslavnější sochař Feidias, tvůrce sochy Dia v Olympii, je používal vědomě ve svých dílech.

Poměr úseček

Toto číslo je poměr, který vznikne řešením následující úlohy.

Úsečku máme rozdělit na dvě různé části tak, aby poměr délky celé úsečky a k délce její větší části x byl roven poměru délky x k délce menší části $(a-x)$.

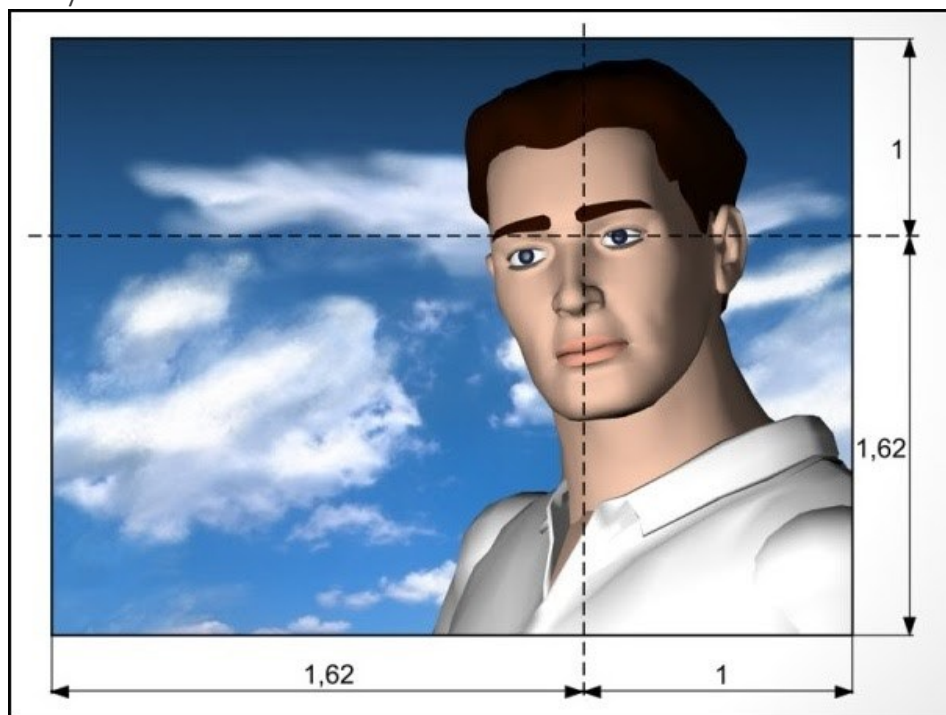
Tedy aby platil vztah $a : x = x : (a - x)$.

Ve středověku a v období renesance byli matematici tak okouzleni tímto poměrem, že byl nazýván „božským poměrem“, „divida proportio“. Renesanční matematik Luca Pacioli vydal v Benátkách v letech 1496-1498 pojednání nazvané „O božské úměře“ („De divina proportione“), která byla napsaná na naléhání Pacilliho přítele Leonarda da Vinci. Leonardo da Vinci také tuto knihu ilustroval. Obsahuje nesmírně zajímavý soubor příkladů výskytů tohoto poměru v rovinných obrazcích i tělesech. V devatenáctém století se začalo používat pojmu „zlatý řez“ a „zlatý poměr“. V matematice, architektuře a biologii je toto číslo známé pod označením číslo ϕ . Jako ϕ jej označil americký matematik Mark Barr.

Výpočet tohoto čísla je dána řešením výše uvedeného poměru $a : x = x : (a - x)$. Po úpravě dostaneme rovnici $x^2 + a \cdot x - a^2 = 0$. Po rozřešení této rovnice pomocí diskriminantu a uvedením řešení do poměru $a : x$ dostáváme

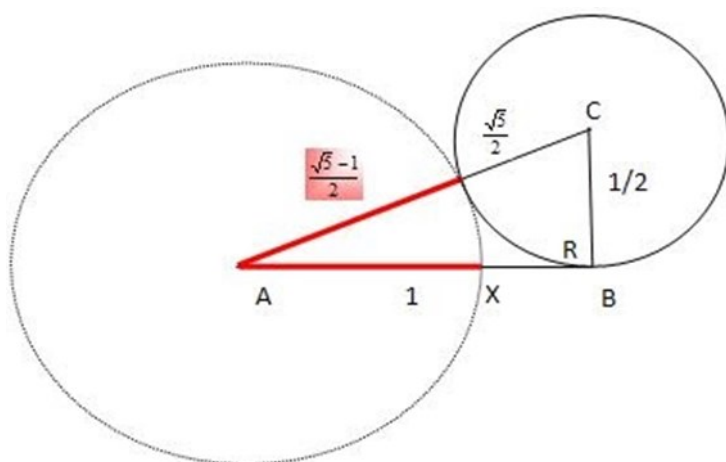
$$\phi = \frac{a}{x} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$$

Zlatý řez



Hodnota čísla ϕ je tedy 1,61803398... a jeho převrácená hodnota $1/\phi$ je rovna 0,61803398... Tedy číslo ϕ a jeho převrácená hodnota mají stejné číslice za desetinnou čárkou a liší se pouze o jednotku. Je to jediné kladné číslo, které má tuto vlastnost. Číslo ϕ je také současně číslo iracionální, tedy nelze je vyjádřit pomocí zlomku.

V geometrii se konstruuje „zlatý řez“ následujícím postupem



Úsečka AB má jednotkovou velikost, kolmá úsečka BC má poloviční velikost. Bod X dělí úsečku AB ve zlatém poměru, tedy platí, že $AB:AX = AX:XB$, tedy

$$1 : \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} : \left(1 - \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$$

a pokud uvážíme, že

$$\frac{1}{\varphi} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} - 1 = \varphi - 1$$

pak poměr úseček lze zapsat následovně:

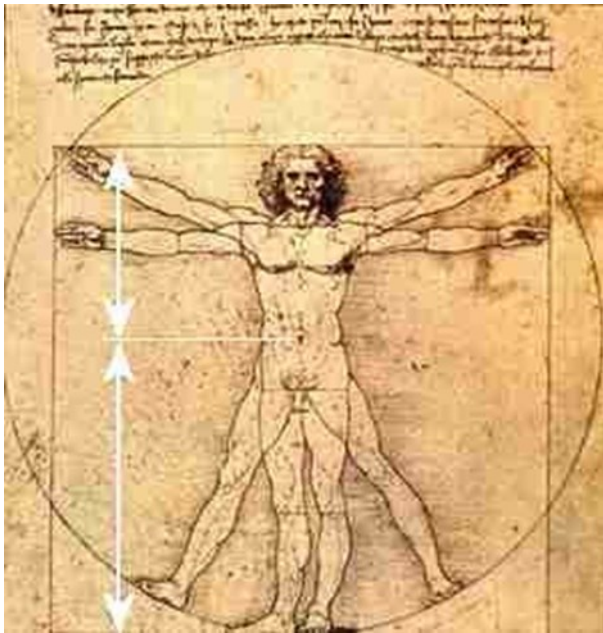
$$\varphi = \frac{1}{\varphi} : \left(1 - \frac{1}{\varphi}\right) = \frac{1}{\varphi} \cdot \frac{\varphi}{\varphi-1} = \frac{1}{\varphi-1} = \frac{1}{\frac{1}{\varphi}} = \varphi$$

tedy opravdu jsou poměry úseček rovné uvedenému číslu.

Pro úplnost uvádíme vztah mezi φ a $1/\varphi$, kde platí:

$$\frac{1}{\varphi} = \frac{1}{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}+1} \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}-1} = \frac{2 \cdot (\sqrt{5}-1)}{4} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} - 1 = \varphi - 1$$

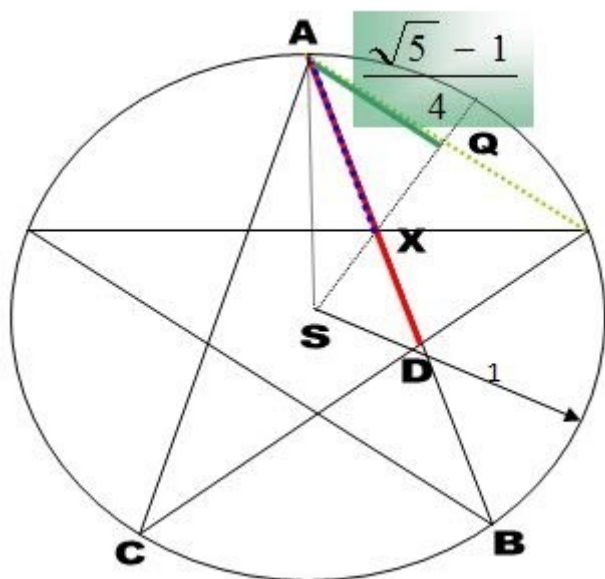
Renesanční umělci využívali číslo φ a zlatý řez vědomě ve svých dílech. Známé jsou ukázky použití čísla φ v kompozicích obrazů a architektonických dílech Leonarda da Vinci, Sandra Botticelli, Michalengela Buonarrotti aj.



Pentagram



Pythagorejci nebo také pythagorovci a posléze řada dalších tajných společností si vybrali za znak svého bratrstva pěticípou hvězdu – pentagram. Pentagram právě proto, že v tomto obrazci je ukryta vnitřní harmonie, která je dokonalá a při své jednoduchosti velice tajemná.



V pěticípé hvězdě je každá úsečka vzhledem k sousední menší rozdělena v poměru zlatého řezu. Poměry úseček jsou $AB:AD = AD : (AB - AD)$ a také $AD:AX = AX : (AD - AX)$

Důkaz prvního poměru plyne z podobnosti trojúhelníků ACB a CDB a shodné velikosti úseček

$CB = CD = AD$ a $DB = AB - AD$.

Obdobně lze dokázat i platnost druhého poměru.

Navíc se v tomto geometrickém objektu ukazuje zajímavá souvislost mezi číslem ϕ a Ludolfovim číslem π .

Trojúhelník ASQ je pravoúhlý a úhel ASQ má velikost 18° ,

tj. $\pi/10$. Pak podle definice goniometrických funkcí v pravoúhlém trojúhelníku platí, že

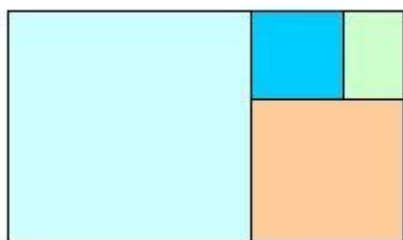
$$\sin \frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{4} = \frac{\phi-1}{2}$$

a tedy

$$\phi = 1 + 2 \cdot \sin \frac{\pi}{10}$$

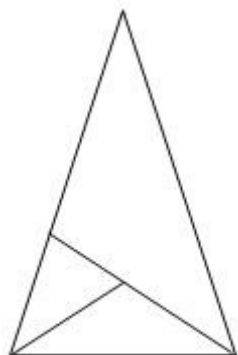
Zlatý obdélník

Zlatý obdélník má poměr stran v poměru ϕ . Pokud ze zlatého obdélníku odstříhneme čtverec, vznikne opět zlatý obdélník.



Zlatý trojúhelník

Zlatý trojúhelník je rovnoramenný trojúhelník s vrcholovým úhlem 36° . Poměr ramene a základny je vždy číslo ϕ . Pokud trojúhelník rozpůlíme tak, že vedeme přímkou jako osu úhlu u základny trojúhelníku, opět vznikne zlatý trojúhelník.



Závěr

Číslo ϕ je význačným číslem, které se objevuje v přírodě buď jako poměr rozměrů přírodních živých útvarů nebo ve formě Fibonacciho posloupnosti. Z toho, jak universálně a někdy i v neočekávaných souvislostech se číslo ϕ objevuje, je možné usuzovat, že význam tohoto čísla je ukryt ve skutečnosti velice hluboko, možná na úrovni základních molekul, které vytvářejí živé organismy, možná až na atomární a subatomární úrovni. To bude ještě třeba v budoucnu analyzovat a tyto souvislosti dokázat.

Literatura

- Matematika pro volné chvíle, S. Kowal, Polytechnická knižnice, SNTL, 1986
- Dějiny matematiky ve středověku, A.P.Puškevič, Academia Praha, 1977
- Deset knih o architektuře, Vitruvius, překl. A. Otoupalík, Praha 1953
- Slovník antické kultury, kol. autorů, Svoboda, Praha 1974
- Za sedmi divy světa, Vojtěch Zamarovský, Albatros, Praha, 1979
- Dějiny přírodních věd v datech, J. Folta, L. Nový, Mladá fronta, Praha, 1979

[1] Marcus Vitruvius Polio, římský architekt a inženýr z konce 1. stol. př. n. l. Překlad: Vitruvius, Deset knih o architektuře, Alois Otoupalík, Praha 1953

[2] Luca Pacioli (kolem roku 1445 – kolem roku 1514), benátský mnich. Jeho základní dílo bylo „Suma aritmetiky, geometrie, poměrů a proporcí“, vydaná r. 1494 v Benátkách.

[3] Kniha „De divina proportionē“ byla znovu vydána v krásné úpravě roku 1956.

[1] Scritti di Leonardo Pisano..., publicati da B. Boncompagni, 1-2, Roma 1857 - 1862

[2] Poměr uvedený v rovnici je zajímavý tím, že je jedno jaké první dva členy Fibonacciho posloupnosti zvolíme. Pokud zvolíme např. první dva členy 6 a 8, stejně se poměr po sobě následujících členů bude blížit číslu ϕ .