

Řeším to na kvadrát

(Doučování z kvadratických rovnic)

Mgr. Pavel Hrubý

Obsah

Jak poznám kvadratickou rovnici?	2
Jak tu potvoru vyřešíme?	2
A co zkouška?	3
Stačí to?	3
První malá teorie	4
Cvičení	5
A to je všechno?	5
Zase trocha teorie: Vietovy vzorce	6
K čemu to je dobré?	6
Pro zoufalce	6
Sbírka úloh 1. ročník SPŠ	7
Závěr	10
Odkazy a zdroje	10

Jak poznám kvadratickou rovnici?

Pokud máš rozeznat, zda je zadaná rovnice kvadratická, hledej tam výraz x^2 .

Takže, rovnice $2x^2 - x - 6 = 0$ je kvadratická rovnice. Výraz x^2 se ti může objevit až po úpravách nějaké rovnice, třeba když upravíš rovnici $\frac{x-2}{x+1} = x - 1$ dostaneš postupně rovnici $x - 2 = x^2 - 1$ a pak tedy rovnici $x^2 - x + 1 = 0$.

Zadanou rovnici se vždy snažíme upravit tak, aby na pravé straně vyšla 0.

Jak tu potvoru vyřešíme?

No, musíme se s ní skamarádit. Úplně natvrdo lze vždy použít našprtané vzorečky a našprtáný následující postup (je v rámečku vpravo).

Dejme si rovnici $2x^2 - x - 6 = 0$

Tak to porovnáme se vzorcem

$$Ax^2 + Bx + C = 0$$

$$2x^2 - x - 6 = 0$$

Z toho vidíme, že u x^2 je číslo 2, tedy **A=2**, u x je číslo -1 (tu jedničku si musíme domyslet!!), tedy **B=-1** a co zbylo je **C=-6**. A také si dej pozor na znaménka.

Vypočítáme číslo D (budeme mu říkat **DISKRIMINANT**)

$$D = B^2 - 4 \cdot A \cdot C = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-6) = 1 + 48 = 49$$

Zase, pozor na znaménka!!!

Diskriminant D vyšel větší než 0, rovnice bude mít tedy dvě řešení

$$x_1 = \frac{-B + \sqrt{D}}{2 \cdot A} = \frac{-(-1) + \sqrt{49}}{2 \cdot 2} = \frac{1 + 7}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

$$x_2 = \frac{-B - \sqrt{D}}{2 \cdot A} = \frac{-(-1) - \sqrt{49}}{2 \cdot 2} = \frac{1 - 7}{4} = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2}$$

No, máme štěstí, odmocninu ze 49 umíme a znaménka jsme nespletli.

Abych byl spokojen, uvedeme výsledek $K = \left\{-\frac{3}{2}, 2\right\}$, to K je množina kořenů kvadratické rovnice.

Tak si zkus následující rovnice

1. $3x^2 + x - 2 = 0$
2. $-2x^2 - 15x + 8 = 0$

Základní postup a vzorce

Kvadratickou rovnici ve tvaru

$$Ax^2 + Bx + C = 0$$

kde A, B, C jsou nějaká čísla.

Spočteme číslo D

$$D = B^2 - 4 \cdot A \cdot C$$

Když vyjde D menší než 0, pak rovnice nemá řešení.

Když ti vyjde 0, má kvadratická rovnice jedno řešení, a to

$$x = \frac{-B}{2 \cdot A}$$

No, a když ti vyjde D větší než 0 pak má rovnice dvě řešení

$$x_1 = \frac{-B + \sqrt{D}}{2 \cdot A}$$

$$x_2 = \frac{-B - \sqrt{D}}{2 \cdot A}$$

A je to (skoro) 😊😊😊😊

Co ti vyšlo?

První příklad $K = \left\{\frac{2}{3}, -1\right\}$

Druhý příklad $K = \left\{-8, \frac{1}{2}\right\}$

A co zkouška?

Stejně jako u lineárních rovnic. Pokud neprovádíme žádné úpravy nebo provádíme jen **ekvivalentní úpravy** a jen si dosadíme do vzorců, zkouška není povinnou součástí řešení. Můžeme si provést ověření výsledku dosazením do zadání. (Opravdu doporučuji ze začátku si toto ověření provést.)

Zkusme to pro náš první příklad $2x^2 - x - 6 = 0$, kde nám vyšlo $K = \left\{-\frac{3}{2}, 2\right\}$, takže dosadíme první kořen

$$2\left(-\frac{3}{2}\right)^2 - \left(-\frac{3}{2}\right) - 6 = 2 \cdot \frac{9}{4} + \frac{3}{2} - 6 = \frac{9}{2} + \frac{3}{2} - 6 = \frac{12}{2} - 6 = 6 - 6 = 0.$$

No, jak to hezky vyšlo. (Jak se ti pracovalo se zlomky a znaménky?)

A druhý kořen jde ověřit rychleji:

$$2 \cdot 2^2 - 2 - 6 = 8 - 8 = 0$$

Ověř si kořeny u úloh 1 a 2.

Stačí to?

Na jednoduchou písemku asi ano, ale například, pokud zadám příklad $2x^2 - 8 = 0$, pak se zděsím, že to někdo řeší pomocí výše uvedených vzorečků. Proč?

Jedná se o rovnici bez lineárního členu (to je ten prostředek rovnice - **Bx**) a tyto rovnice se řeší přímým postupem. Také se nazývá ryze kvadratická rovnice.

$$2x^2 - 8 = 0$$

$$2x^2 = 8$$

$$x^2 = 4$$

To je elementární odmocnina, ale nesmíme zapomenout, že řešíme rovnici, takže za x mohu dosadit jak 2, tak -2. $K = \{-2, 2\}$

Stejně tak rovnice bez absolutního členu (to je to **C**) například $2x^2 - 4x = 0$

Zde se provádí jednoduchý rozklad na součin vytknutím $2x \cdot (x - 2) = 0$ a pak použijeme větu o nulovém součinu.

EKVIVALENTNÍ ÚPRAVY

Ekvivalentní úprava rovnice nemění množinu kořenů dané rovnice.

Jsou to

1. Přičtení nebo odečtení výrazu od obou stran rovnice
2. Násobení obou stran rovnice nenulovým výrazem.

Elementární odmocnina

Jestliže

$$x^2 = E$$

pak

$$x = \pm\sqrt{E}$$

Kde E je kladné reálné číslo nebo 0.

Jestliže je součin dvou výrazů roven nule, pak první nebo druhý výraz je roven nule.

$$AB = 0 \rightarrow A = 0 \text{ nebo } B = 0$$

Tedy pokud $2x \cdot (x - 2) = 0$, pak buď $2x = 0$ nebo $x - 2 = 0$. Tedy výsledek je 0 a 2. $K = \{0, 2\}$

Vyřeš následující příklady

$$8x^2 - 16 = 0$$

$$3x^2 + 6 = 0$$

$$6x^2 - 7x = 0$$

$$6x^2 + 7x = 0$$

První malá teorie

Máme kvadratickou rovnici v základním tvaru (mocniny x jsou seřazeny podle velikosti), a, b, c jsou reálná čísla a $a \neq 0$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Člen ax^2 nazveme kvadratický člen rovnice

Člen bx nazveme lineární člen rovnice

Člen c nazveme absolutní člen rovnice

Koeficienty a, b, c pojmenujeme

a – koeficient u kvadratického členu (je vždy nenulový)

b – koeficient u lineárního členu

c – koeficient u absolutního členu

Kvadratické rovnice si tedy rozdělíme

$ax^2 + bx + c = 0$ – rovnice v základním tvaru (koeficienty a, b, c jsou různé od nuly)

$ax^2 + bx = 0$ – rovnice bez absolutního členu ($c=0$)

$ax^2 + c = 0$ – rovnice bez lineárního členu – ryze kvadratická rovnice ($b=0$)

Cvičení

a) $2x^2 - 11x + 14 = 0$

b) $x^2 + 2x - 63 = 0$

c) $x^2 - 16x + 48 = 0$

d) $x^2 + 7x - 1 = 0$

e) $2x^2 + 7x - 9 = 0$

f) $7 - 5x^2 + 2x = 0$

g) $x^2 + 3x + 7 = 0$

h) $4x^2 + 4x + 1 = 0$

i) $x^2 - 7x - 30 = 0$

j) $x^2 + 4x - 96 = 0$

k) $x^2 + 0,9x - 0,36 = 0$

l) $\frac{6}{x-1} + \frac{5}{x+1} = \frac{6}{x-2}$

m) $\frac{x-1}{x-2} + \frac{x-2}{x-1} = \frac{5}{2}$

n) $2x^2 + 9x = 0$

o) $3x^2 = 6x$

p) $12x = -8x^2$

q) $4x^2 - 64 = 0$

r) $16 - 7x^2 = 79$

s) $-3x^2 + 243 = 0$

t) $2(4x-1)(x+1) = (4x+1)(x-1) - 7$

u) $(6-x)(2x-5) + 30 = 0$

v) $(x+1)(x+2) = (2x-1)(2x-10)$

w) $(3x-2) - (x-3)^2 + 11 = 0$

x) $(x+7)(x-9) + (x-7)(x+9) + 76 = 0$

y) $\frac{x+3}{x-3} + \frac{x-6}{x+6} = \frac{11}{5}$

z) $\frac{25+x}{9+x} = \frac{13+x}{47-x}$

A to je všechno?

Není.

Pokud si spočítáš více příkladů, přijdeš ještě na možnost použití známých vzorečků pro úpravu výrazů s mocninami – viz rámeček.

Například

$$x^2 + 4x + 4 = 0$$

Vyřešíme $x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2 = 0$

To je ryze kvadratická rovnice, a tedy $x+2=0$

A potom řešení je $x = -2$

Znamé vzorečky

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a+b) \cdot (a-b)$$

Zase trocha teorie: Vietovy vzorce

V teorii řešení kvadratických rovnic se ještě uvádí vztah mezi kořeny a koeficienty kvadratické rovnice.

Nejdříve si všimněte, že základní tvar kvadratické rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ lze převést vydělením koeficientem u kvadratického členu na tzv. normovaný tvar $x^2 + px + q = 0$, kde $p = \frac{b}{a}$ a $q = \frac{c}{a}$. Kořeny této rovnice se nezmění, poněvadž se jedná o ekvivalentní úpravu.

Takže třeba rovnice $3x^2 + x - 2 = 0$ v normovaném tvaru je $x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{2}{3} = 0$

Pro normovaný tvar pak platí **Vietovy vzorce** a ty jsou následující

$$x_1 + x_2 = -p$$

$$x_1 \cdot x_2 = q$$

Slovně: součet kořenů kvadratické rovnice je roven záporně vzatému lineárnímu koeficientu v normovaném tvaru rovnice a součin kořenů kvadratické rovnice je roven absolutnímu členu v normovaném tvaru rovnice.

Tedy u našeho příkladu $x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{2}{3} = 0$ bude platit, že $\frac{2}{3} + (-1) = -\frac{1}{3}$ a $\frac{2}{3} \cdot (-1) = -\frac{2}{3}$

Přímým důsledkem Vietových vzorců je možnost rozložení normovaného kvadratického trojčlenu na součin. Platí

$$x^2 + px + q = (x - x_1) \cdot (x - x_2)$$

Takže se ti to bude hodit do budoucna při úpravě výrazů, třeba

$$\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4} = \frac{(x - 2)(x - 3)}{(x + 2)(x - 2)} = \frac{x - 3}{x + 2}$$

pro $x \neq \pm 2$

K čemu to je dobré?

Tak v matematice se bez řešení kvadratických rovnic neobejdeš již při vyšetřování průběhu kvadratické funkce – grafem kvadratické funkce je parabola a ta může protínat osu x ve dvou, jednom nebo žádném bodě. A ty body musíš umět spočítat.

A co třeba toto:

V Javorově je velký obdélníkový park. Ema se při své cestě na výtvarný kroužek potřebuje dostat z jednoho rohu na roh přesně opačný. Když je hezky, jde šikmo přes park po vychozené cestičce dlouhé 650 metrů. Když ale prší a cestička je rozblácená, obchází Ema park po jeho kraji, tedy po dvou na sebe kolmých asfaltových cestách. Tato cesta měří 890 metrů. Kolik metrů měří delší strana parku?

Pro zoufalce

Lineární a kvadratické rovnice o jedné reálné neznámé jsou nejjednoduššími polynomiálními rovnicemi tedy rovnicemi vyšších řádů. Ve vyšší matematice se dokazuje, že obecně nelze řešit pomocí vzorců rovnice vyššího než čtvrtého řádu.

Záporný diskriminant při řešení kvadratické rovnice byl východiskem při zavedení komplexních čísel a celé teorie komplexních funkcí.

Zajímavé jsou speciální rovnice $x + \frac{1}{x} = A$, kde např. „kouzelné“ číslo φ (číslo zlatého řezu, Fibonacciho číslo, číslo pyramid) je řešením rovnice $x^2 = x + 1$.

Sbírka úloh 1. ročník SPŠ

Zkus vyřešit alespoň 5 úloh z každého oddílu.

1. Řešte v R rovnice:

- | | |
|--|--|
| a) $x^2 - 42x = 759$ | $[x = 21 + 20\sqrt{3} \vee x = 21 - 20\sqrt{3}]$ |
| b) $x^2 - 64x - 1621 = 0$ | $[x = 32 + 23\sqrt{5} \vee x = 32 - 23\sqrt{5}]$ |
| c) $x^2 + 0,9x - 0,36 = 0$ | $[x = -1,2 \vee x = 0,3]$ |
| d) $x^2 + 0,9x - 0,7 = 0$ | $[x = -1,4 \vee x = 0,5]$ |
| e) $4x^2 + 17x = 15$ | $[x = -5 \vee x = \frac{3}{4}]$ |
| f) $10x^2 + 9x - 9 = 0$ | $[x = -\frac{3}{2} \vee x = \frac{3}{5}]$ |
| g) $5x^2 - 18x - 8 = 0$ | $[x = -\frac{2}{5} \vee x = 4]$ |
| h) $64x^2 - 16x - 35 = 0$ | $[x = -\frac{5}{8} \vee x = \frac{7}{8}]$ |
| i) $16x^2 - 40x - 23 = 0$ | $[x = \frac{5}{4} + \sqrt{3} \vee x = \frac{5}{4} - \sqrt{3}]$ |
| j) $16x^2 - 48x + 41 = 0$ | $[\{\}]$ |
| k) $x^2 - 77x + 1452 = 0$ | $[x = 33 \vee x = 44]$ |
| l) $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} = \frac{x^2}{9} - 3$ | $[x = -\frac{9}{4} \vee x = 12]$ |
| m) $2x^2 + 1,1x - 3,91 = 0$ | $[x = -1,7 \vee x = 1,15]$ |
| n) $(x-6)^2 + (x-8)^2 = 100$ | $[x = 0 \vee x = 14]$ |
| o) $(x-2)^2 + (x-9)^2 = (x-11)^2$ | $[x = 6 \vee x = -6]$ |
| p) $(4x-5)(5x+6) = 10 - (3+2x)(3x-4)$ | $[x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2}]$ |
| q) $3 \cdot (x - \sqrt{3})(1 + 2x) = 0$ | $[x = -\frac{1}{2} \vee x = \sqrt{3}]$ |
| r) $\frac{2x^2}{3} + \frac{x^2}{2} = 23 - \frac{3x^2}{4}$ | $[x = 2\sqrt{3} \vee x = 2\sqrt{3}]$ |
| s) $\frac{9+4x}{2x-3} + \frac{3x+8}{x-4} = 0$ | $[x = \sqrt{6} \vee x = \sqrt{6}]$ |
| t) $\frac{x^2 - 5x + 11}{x^2 - 7x + 17} - \frac{5}{7} = 0$ | $[x = 2 \vee x = -2]$ |

$$\text{u)} \quad \frac{\sqrt{2}+x}{x} = 2 + \frac{x}{\sqrt{2}+x} \quad [x=1 \vee x=-1]$$

$$\text{v)} \quad \frac{5+4x}{x} = 1 + \frac{12}{x-2} \quad \left[x = -\frac{2}{3} \vee x = 5 \right]$$

$$\text{w)} \quad \frac{4}{3-x} = \frac{1}{x} + \frac{4}{x+3} \quad [x=1 \vee x=-1]$$

$$\text{x)} \quad \frac{-5}{1+x} = \frac{4}{2-x} + \frac{5}{2x-3} \quad \left[x = \frac{8}{7} \vee x = 4 \right]$$

$$\text{y)} \quad \frac{x^2-5}{5} = \frac{5}{x^2-5} \quad [x=0 \vee x=\sqrt{10} \vee x=-\sqrt{10}]$$

2. Řešte v R rovnice:

$$\text{a)} \quad \frac{5-3x}{3-5x} + \frac{3-5x}{5-3x} = \frac{5}{2} \quad \left[x = \frac{1}{7} \vee x = 7 \right]$$

$$\text{b)} \quad \frac{5}{x-2} + \frac{3}{x-3} - \frac{7}{x-1} = 0 \quad [x=-3+\sqrt{30} \vee x=-3-\sqrt{30}]$$

$$\text{c)} \quad \frac{1}{x+4} - \frac{4}{x-4} + \frac{x^2-20}{x^2-16} = 0 \quad [x=-5 \vee x=8]$$

$$\text{d)} \quad \frac{2}{1-x} - \frac{7}{x+1} = \frac{3}{x} \quad \left[x = -\frac{1}{3} \vee x = \frac{3}{4} \right]$$

$$\text{e)} \quad \frac{3x}{x+6} - \frac{4}{x-1} = 4 \quad [x=-27 \vee x=0]$$

$$\text{f)} \quad \frac{1}{x} + \frac{4}{x+3} + \frac{4}{x-3} = 0 \quad [x=1 \vee x=-1]$$

$$\text{g)} \quad \frac{5}{3-2x} + \frac{4}{x-2} = \frac{5}{x+1} \quad \left[x = \frac{8}{7} \vee x = 4 \right]$$

3. Řešte v R rovnice:

$$\text{a)} \quad \frac{6}{x-1} + \frac{5}{x+1} = \frac{6}{x-2} \quad \left[x = \frac{1}{5} \vee x = 4 \right]$$

$$\text{b)} \quad \frac{2x-3}{x^3+1} = \frac{1}{x^2-x+1} - \frac{2}{x^2+2x+1} \quad \left[x = -\frac{1}{3} \vee x = 2 \right]$$

$$\text{c)} \quad \frac{x+3}{x-2} + \frac{x+2}{x-3} = \frac{x+3}{x-3} - \frac{x+2}{x-2} \quad \left[x = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{3} \vee x = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{3} \right]$$

$$\text{d)} \quad \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-4} = \frac{1}{x+5} - \frac{1}{x-3} \quad \left[x = \frac{11}{5} \vee x = 7 \right]$$

$$\text{e)} \quad \frac{1}{x-4} - \frac{1}{x+4} = \frac{1}{x-5} - \frac{1}{x-2} \quad \left[x = \frac{16}{5} \vee x = 8 \right]$$

$$\text{f)} \quad \frac{1}{x-5} - \frac{1}{x+3} = \frac{1}{x-6} - \frac{1}{x-3} \quad \left[x = \frac{21}{5} \vee x = 9 \right]$$

$$\text{g)} \quad \frac{x-4}{2x-3} = \frac{x+5}{x+4} \quad \left[x = -\frac{7}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{5} \vee x = -\frac{7}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{5} \right]$$

$$\text{h) } \frac{\frac{x-10}{5}}{\frac{x+10}{4}} = \frac{x+10}{5(x-10)} \quad \left[x = \frac{10}{3} \vee x = 30 \right]$$

$$\text{i) } \frac{2x+1}{x+3} - \frac{x-1}{x^2-9} = \frac{x+3}{3-x} - \frac{4+x}{3+x} \quad \left[x = -\frac{5}{4} \vee x = 1 \right]$$

$$\text{j) } \frac{18y+7}{y^3-1} = \frac{30}{y-1} - \frac{13}{y^2+y+1} \quad [x = -4 \vee x = 9]$$

4. Řešte v R rovnice:

$$\text{a) } \frac{x}{x-\sqrt{2}} - \frac{x}{x+\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \quad [x = \sqrt{3} + \sqrt{5} \vee x = \sqrt{3} - \sqrt{5}]$$

$$\text{b) } (2x+3)^2 - (3x-2)^2 = (4x-5)^2 - (3x-2)(x+6) \quad \left[x = \frac{4}{9} \vee x = 4 \right]$$

$$\text{c) } (x+4)^2 + (x+8)^2 + 20 = (x+2)^2 \quad [x = -12 \vee x = -8]$$

$$\text{d) } x(x-\sqrt{3}) - \sqrt{3}(x-1) - (5+\sqrt{3}) = 0 \quad [x = \sqrt{3} + 2\sqrt{2} \vee x = \sqrt{3} - 2\sqrt{2}]$$

5. Rozložte kvadratické trojčleny v součin:

$$\text{a) } x^2 - 9x - 22 \quad [(x+2)(x-11)]$$

$$\text{b) } x^2 - 10x + 24 \quad [(x-4)(x-6)]$$

$$\text{c) } x^2 + 4x - 96 \quad [(x-8)(x+12)]$$

$$\text{d) } x^2 + 27x + 126 \quad [(x+6)(x+21)]$$

$$\text{e) } x^2 - 24x + 140 \quad [(x-10)(x-14)]$$

$$\text{f) } x^2 + 43x + 42 \quad [(x+1)(x+42)]$$

$$\text{g) } x^2 - 7x + 12 \quad [(x-3)(x-4)]$$

$$\text{h) } x^2 + 13x + 42 \quad [(x+6)(x+7)]$$

$$\text{i) } x^2 - x - 132 \quad [(x+11)(x-12)]$$

$$\text{j) } 4x^2 + 12x - 216 \quad [4(x-6)(x+9)]$$

$$\text{k) } 2x^2 - 5x + 2 \quad [(2x-1)(x-2)]$$

$$\text{l) } 3x^2 - 2x - 1 \quad [(3x+1)(x-1)]$$

6. Zkraťte zlomky:

$$\text{a) } \frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 8x + 15} \quad \left[\frac{x-4}{x-5}; x \neq 3 \wedge x \neq 5 \right]$$

$$\text{b) } \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 5x + 6} \quad \left[\frac{x-2}{x-3}; x \neq 2 \wedge x \neq 3 \right]$$

$$\text{c) } \frac{2x^2 + 8x - 90}{3x^2 - 36x + 105} \quad \left[\frac{2(x+9)}{3(x-7)}; x \neq 5 \wedge x \neq 7 \right]$$

$$\text{d) } \frac{x^2 - 9xy + 14y^2}{x^2 - xy - 2y^2} \quad \left[\frac{x-7y}{x+y}; x \neq -y \wedge x \neq 2y \right]$$

Závěr

Přeji všem při řešení kvadratických a jiných budoucích rovnic mnoho zdaru.

Odkazy a zdroje

<https://www.umimematiku.cz/cviceni-reseni-kvadraticke-rovnice>

<http://snadnaskola.cz/kvadraticke-rovnice/>

<https://www.priklady.com/cs/index.php/rovnice-a-nerovnice/kvadraticke-rovnice-a-nerovnice>

https://cs.wikipedia.org/wiki/Kvadratick%C3%A1_rovnice

<http://sbirkaprikladu.eu/Generators/Kvadraticka-funkce/kvadraticka-rovnice.aspx>

<https://vyuka.spsc.v.cz/matematika/sbirka.html>