

# Vlákna

Mgr. Pavel Hrubý, 2022

## 1 Úvod

### 1.1 Collatzův problém - formulace

Collatzův problém je v matematice domněnka, kterou vyslovil Lothar Collatz. Tento problém je rovněž známý pod názvy  $3n + 1$  problém, Ulamův problém (podle Stanisława Ulama), Kakutanův problém (podle Šizua Kakutaniho), Thwaitův problém (podle sira Bryana Thwaitese), Hassův algoritmus (podle Helmuta Hasseho) nebo také jako Syrakuský problém. Posloupnost takto zkoumaných čísel se někdy nazývá též jako posloupnost ledové kroupy (hailstone - protože hodnota čísel v posloupnosti často mnohokrát klesne a opět se zvýší, podobně jako ledové kroupy mění svoji výšku, když dochází k jejich tvorbě v oblacích).

Domněnka může být shrnuta následovně. Vezměme jakékoliv kladné celé číslo  $n$ . Pokud je  $n$  sudé číslo, vydělíme jej dvěma, získáme tak  $n / 2$ . Pokud je  $n$  liché číslo, vynásobí se třemi, přičte se jednička, tj.  $3n + 1$ . Tento postup (v angličtině nazývaný také „Half Or Triple Plus One“ nebo HOTPO[5]) se dále opakuje. Domněnka je taková, že nezáleží na tom, jaké počáteční číslo  $n$  je zvoleno – výsledná posloupnost vždy nakonec dojde k číslu 1.

Popsaný postup lze vyjádřit funkcí

$$C(n) = \begin{cases} 3n + 1 & n \text{ liché} \\ \frac{n}{2} & n \text{ sudé} \end{cases}$$

Hodnota  $C(n)$  pro lichá  $n$  bude zjevně sudá. Často se tak používá zkrácená varianta a notace modulární aritmetiky

$$T(n) = \begin{cases} \frac{3n + 1}{2} & \text{pro } n \equiv 1 \pmod{2} \\ \frac{n}{2} & \text{pro } n \equiv 0 \pmod{2} \end{cases}$$

Problém pak lze popsat pomocí iterací těchto funkcí: Je pro libovolné počáteční kladné celé číslo  $n$  některá  $k$ -tá iterace  $T^k(n)$  rovna jedné? Formálně:  $\forall n \exists k; T^k(n) = 1$ .

Domněnka zatím nebyla dokázána. Byla ale výpočetně ověřena pro všechna čísla až do velikosti  $2^{68}$ .

### 1.1 Formulace problému

Při zkoumání této domněnky jsem narazil na možnost přeformulovat tento problém následujícím způsobem. Každé sudé číslo, které se vyskytuje v posloupnosti vždy vede po opakovaném dělení 2 na liché číslo. Sudá čísla jsou tedy jen jakési vsuvky mezi lichými čísly. Uvažoval jsem tedy posloupnosti pouze s lichými čísly, která jsou vytvořena předpisem  $M = \frac{3 \cdot L + 1}{2^k}$ , kde  $L$  je liché číslo a  $k$  je vždy maximální exponent zvolený tak, aby opět výsledkem bylo liché číslo  $M$ . Současně  $k$  označuje počet sudých čísel, která jsou „vsunuta“ mezi čísla  $L$  a  $M$  podle původního zadání problému. Při dalším rozboru jsem vztah invertoval na  $L = \frac{2^{k \cdot M} - 1}{3}$ . Zde mě napadl koncept tkzv. vláken, která mají speciální vlastnosti a pomocí nichž je možné Collatzovu domněnku zkoumat z jiného pohledu. Výsledkem je důkaz této domněnky.

## 2 Vlákna

### 2.1 Definice: Vlákno

Vlákem  $Q(s)$  nazveme množinu generovanou lichým kladným číslem  $s$ ,  $s \not\equiv 0 \pmod{3}$ , následovně:

$Q(s) = \left\{ \frac{2^k \cdot s - 1}{3}; k \in \mathbb{N} \right\}$ , kde  $k \in \mathbb{N}$  je voleno tak, že výsledkem je liché číslo. Číslo  $s$  nazveme základ vlákna.

#### 2.1.1 Lemma: Exponent v definici vlákna

Exponent  $k$  v definici vlákna je sudý pro  $s \equiv 1 \pmod{3}$ , je lichý pro  $s \equiv 2 \pmod{3}$ . Pak je výraz v čitateli dělitelný 3.

Důkaz:

Nechť  $s \equiv 1 \pmod{3} \rightarrow s = 3t + 1$ . Pak pro  $k$  sudé

$$\begin{aligned} \frac{2^k \cdot s - 1}{3} &= \frac{2^k \cdot (3t + 1) - 1}{3} = \frac{2^k \cdot 3t + 2^k - 1}{3} = 2^k \cdot t + \frac{(2 + 1) \cdot (2^{k-1} - 2^{k-2} + \dots - 1)}{3} \\ &= 2^k \cdot t + 2^{k-1} - 2^{k-2} + \dots - 1 \end{aligned}$$

Nechť  $s \equiv 2 \pmod{3} \rightarrow s = 3t + 2$ . Pak pro  $k$  liché

$$\begin{aligned} \frac{2^k \cdot s - 1}{3} &= \frac{2^k \cdot (3t + 2) - 1}{3} = \frac{2^k \cdot 3t + 2^{k+1} - 1}{3} = 2^k \cdot t + \frac{(2 + 1) \cdot (2^k - 2^{k-1} + \dots - 1)}{3} \\ &= 2^k \cdot t + 2^k - 2^{k-1} + \dots - 1 \end{aligned}$$

☺

#### 2.1.2 Lemma: Neexistence vlákna

Pokud  $s \equiv 0 \pmod{3}$ , vlákno  $Q(s)$  neexistuje.

Důkaz:

Prvky vlákna  $Q(s)$  by tedy měly být  $L = \frac{2^k \cdot s - 1}{3}$  a  $s = 3K$ . Tedy  $L = \frac{2^k \cdot 3K - 1}{3} \rightarrow 3L = 2^k \cdot 3K - 1$

Levá a pravá strana mají různý zbytek po dělení 3 (jsou v různých zbytkových třídách mod 3). Spor.

☺

## 2.2 Věta: Existence vlákna pro každé liché číslo

Pro každé kladné liché číslo  $L$  existuje vlákno  $Q(s)$  takové, že  $L \in Q(s)$ .

Důkaz:

Pokud  $L \in Q(s)$  pak  $L = \frac{2^k \cdot s - 1}{3}$  tj.  $s = \frac{3 \cdot L + 1}{2^k}$ , kde  $k$  je maximální exponent, pro který  $2^k$  dělí čitatele výrazu. Poněvadž je číselník sudé číslo je exponent  $k \geq 1$ .

☺

## 2.3 Věta: Existence vlákna 2

Pro každé kladné liché číslo  $L$  takové, že  $L$  není násobkem 3, existuje vlákno  $Q(L)$ .

Důkaz:

viz 1.1.2 a 1.2

☺

## 2.4 Definice: Následné vlákno

Nechť  $L$  je prvek vlákna  $Q(S)$  a  $L$  není násobkem 3. Pak definujeme následné vlákno o základu  $L$  jako  $Q(L)$ .

Poznámka: Následné vlákno je definováno pro libovolný prvek nějakého vlákna vyjma prvků, které jsou násobkem 3, tj. následnými vlákny vlákna  $Q(1)$  jsou vlákna  $Q(5)$ ,  $Q(85)$ ,  $Q(341)$ , ...

Poznámka: Vztah mezi vlákny  $Q(S)$  a  $Q(L)$  označíme  $Q(S) \subset Q(L)$ .

## 2.5 Definice: Index prvku ve vlákne

Nechť  $L \in Q(s)$  a  $L = \frac{2^k \cdot s - 1}{3}$ . Pak exponent  $k$  nazveme index prvku  $L$  ve vlákne  $Q(s)$ .

## 2.6 Definice: Index prvku v následném vlákne

Nechť  $L \in Q(s)$  a  $L = \frac{2^i \cdot s - 1}{3}$ , a  $i$  je index prvku  $s$  ve vlákne  $Q(s)$ . Nechť existuje následné vlákno  $Q(L)$ . Nechť  $A$  je prvek vlákna  $Q(L)$  s indexem  $j$ . Pak index prvku  $A$  vzhledem k vláknu  $Q(s)$  je  $i+j$ .

Poznámka: vlákno  $Q(s)$  nazveme předchozí vlákno k vláknu  $Q(L)$ .

## 2.7 Věta: Existence předchozího vlákna

Nechť  $Q(L)$  je vlákno a  $L$  jeho základ. Pak existuje vlákno  $Q(K)$  pro něž platí  $L \in Q(K)$ .

Důkaz:

Nechť existuje vlákno  $Q(L)$ . Ukažme, že  $s$  musí být prvkem nějakého jiného vlákna např.  $Q(K)$ , tj. pro

$$L = \frac{2^n \cdot K - 1}{3} \text{ existuje } n \text{ a } K \text{ takové, že } K = \frac{3 \cdot L + 1}{2^n}, \text{ a tedy } L \in Q(K) \rightarrow Q(K) \subset Q(L) \text{ ☺}$$

Ilustrace:

$s=53$ ,  $p=5$ ,  $53 \in Q(5)$ , tj.  $P(5) \subset Q(53)$

Poznámka: Pozor, to neznamená, že vždy platí  $K < L$ .

## 2.8 Věta: Existence vlákna, které nemá předchůdce

Vlákno  $Q(Z)$  nemá předchůdce právě když je  $Z=1$ .

Důkaz:

Pokud vlákno  $Q(Z)$  nemá předchůdce, pak pro základ vlákna  $Z$  musí platit, že předchozí vlákno je totožné s tímto vlákem  $Q(Z)$ . Tedy

$$Z = \frac{3 \cdot Z - 1}{2^n}$$

$$2^n \cdot Z = 3 \cdot Z - 1$$

$$Z \cdot (3 - 2^n) = 1 \rightarrow n = 1 \rightarrow Z = 1 \text{ ☺}$$

## 2.9 Věta: O posloupnosti vláken

Nechť  $Q(A_0) \subset Q(A_1) \subset \dots \subset Q(A_{k-1}) \subset Q(A_k)$  jsou vlákna. Nechť  $y \in Q(A_k)$ .

Nechť index prvku  $A_i$  ve vlákne  $Q(A_{i-1})$  je  $s_i$  a index prvku  $A_0$  je  $s_0$ .

$A_0$  označme  $z$  a nazveme základ posloupnosti.

Pak mezi prvky  $z$  a  $y$  platí vztah:

$$2^\beta \cdot z - 3^{k+1}y = \sum_{i=0}^k 3^i \cdot 2^{s_i}$$

kde

$$\beta = s_0 + s_1 + \dots + s_k$$

$$S_j = s_{j+1} + \dots + s_k = \beta - (s_0 + \dots + s_j)$$

$$S_k = 0$$

Důkaz: indukcí

1) Nechť  $k=1$

Je dáno  $A_0$ .

$$Q(A_0) \subset Q(A_1)$$

$$A_1 \in Q(A_0)$$

$$y \in Q(A_1)$$

$$y = \frac{2^{s_1} \cdot A_1 - 1}{3}$$

$$x \in Q(A_0)$$

$$x = \frac{2^{s_0} \cdot A_0 - 1}{3} = A_1$$

$$y = \frac{2^{s_1} \cdot \frac{2^{s_0} \cdot A_0 - 1}{3} - 1}{3} = \frac{2^{s_0+s_1} \cdot z - 2^{s_1} - 3}{3^2}$$

$$\beta = s_0 + s_1$$

$$3^2 \cdot y = 2^{s_0+s_1} \cdot z - 2^{s_1} - 3$$

$$2^{s_0+s_1} \cdot z - 3^2 \cdot y = 2^{s_1} + 3$$

$$2^{s_0+s_1} \cdot z - 3^2 y = 3^0 \cdot 2^{\beta-s_0} + 3^1 \cdot 2^{\beta-(s_0+s_1)}$$

$$2^\beta \cdot z - 3^2 y = 3^0 \cdot 2^{s_0} + 3^1 \cdot 2^{s_1}$$

2) Nechť vztah platí pro  $k$  a  $Q(A_k) \subset Q(A_{k+1})$

$$2^\beta \cdot z - 3^{k+1}y = \sum_{i=0}^{k-1} 3^i \cdot 2^{s_i}$$

Pak platí i pro  $k+1$

$$2^{\beta+s_{k+1}} \cdot z - 3^{k+2} w = \sum_{i=0}^k 3^i \cdot 2^{S_i}$$

kde

$$\beta = s_0 + s_1 + \dots + s_k$$

$$S_j = s_{j+1} + \dots + s_k = \beta - (s_0 + \dots + s_j)$$

$$S_k = 0$$

$$\hat{\beta} = s_0 + s_1 + \dots + s_k + s_{k+1}$$

$$y \in Q(A_k)$$

$$A_{k+1} = y$$

$$w = \frac{2^{S_{k+1}} \cdot y - 1}{3}$$

Má platit:

$$2^{\beta+s_{k+1}} \cdot z - 3^{k+2} w = \sum_{i=0}^{k+1} 3^i \cdot 2^{S_i}$$

$$2^{S_{k+1}} \cdot 2^{\beta} \cdot z - 3 \cdot 3^{k+1} w = \sum_{i=0}^k 3^i \cdot 2^{S_i} + 3^{k+1} \cdot 2^{S_{k+1}}$$

$$2^{S_{k+1}} \cdot 2^{\beta} \cdot z - 3 \cdot 3^{k+1} w = 3^0 \cdot 2^{S_0} + 3^1 \cdot 2^{S_1} + \dots + 3^k \cdot 2^{S_k} + 3^{k+1} \cdot 2^{S_{k+1}}$$

$$2^{S_{k+1}} \cdot 2^{\beta} \cdot z - 3 \cdot 3^{k+1} w = 3^0 \cdot 2^{\hat{\beta}-s_0} + 3^1 \cdot 2^{\hat{\beta}-(s_0+s_1)} + \dots + 3^k \cdot 2^{\hat{\beta}-(s_0+\dots+s_k)} + 3^{k+1} \cdot 2^0$$

$$2^{S_{k+1}} \cdot 2^{\beta} \cdot z - 3 \cdot 3^{k+1} w = 2^{S_{k+1}} \cdot (3^0 \cdot 2^{\beta-s_0} + 3^1 \cdot 2^{\beta-(s_0+s_1)} + \dots + 3^k \cdot 2^{\beta-(s_0+\dots+s_k)}) + 3^{k+1} \cdot 2^0$$

$$2^{S_{k+1}} \cdot 2^{\beta} \cdot z - 3 \cdot 3^{k+1} w = 2^{S_{k+1}} \cdot \sum_{i=0}^k 3^i \cdot 2^{S_i} + 3^{k+1} \cdot 2^0$$

$$2^{S_{k+1}} \cdot 2^{\beta} \cdot z - 3 \cdot 3^{k+1} w = 2^{S_{k+1}} \cdot (2^{\beta} \cdot z - 3^{k+1} y) + 3^{k+1} \cdot 2^0$$

$$2^{S_{k+1}} \cdot 2^{\beta} \cdot z - 3 \cdot 3^{k+1} \cdot \frac{2^{S_{k+1}} \cdot y - 1}{3} = 2^{S_{k+1}} \cdot (2^{\beta} \cdot z - 3^{k+1} y) + 3^{k+1}$$

$$2^{S_{k+1}} \cdot 2^{\beta} \cdot z - 3^{k+1} \cdot (2^{S_{k+1}} \cdot y - 1) = 2^{S_{k+1}} \cdot (2^{\beta} \cdot z - 3^{k+1} y) + 3^{k+1}$$

$$2^{S_{k+1}} \cdot 2^{\beta} \cdot z - 3^{k+1} \cdot 2^{S_{k+1}} \cdot y + 3^{k+1} = 2^{S_{k+1}} \cdot (2^{\beta} \cdot z - 3^{k+1} y) + 3^{k+1}$$

$$2^{S_{k+1}} \cdot (2^{\beta} \cdot z - 3^{k+1} \cdot y) = 2^{S_{k+1}} \cdot (2^{\beta} \cdot z - 3^{k+1} y)$$

$$0 = 0 \quad \text{☺}$$

## 2.10 Věta: O jedinečném výskytu prvku

Nechť  $L$  je liché číslo. Pak existuje právě jedno vlákno, jehož je prvkem.

Důkaz:

sporem, necht'  $X$  a  $Y$  jsou různé základy vláken a  $L$  je prvek obou dvou vláken

$$L = \frac{2^u X - 1}{3} = \frac{2^v Y - 1}{3}$$

$$2^u X = 2^v Y$$

$$2^{u-v} X = Y$$

$Y$  je liché číslo tedy  $u = v$  a pak  $X = Y$ . ☺

Důsledek:

- Ve všech vláknech neexistují dva stejné prvky.
- Vlákna tvoří po dvou disjunktní nekonečné množiny.

### 2.11 Věta: Sjednocení vláken

Sjednocením všech vláken dostaneme množinu všech lichých čísel.

Důkaz:

Necht' existuje liché číslo, které není prvkem žádného vlákna. Spor s 1.2

☺

Tím by měla být dokázána Collatzova domněnka v notaci  $2^k$ . Pro každé liché číslo existuje cesta ze základního vlákna o základu 1. Obrátíme-li pořadí prvků v cestě, dostáváme sekvenci pro libovolné liché číslo.

## 3 Rezidua

Úvod

V teoriích, které se zabývají řešením tohoto problému se vyskytuje pojem reziduum prvku a omezení rezidua. Na základě teorie vláken se pokusíme tento problém vyřešit.

Experimentálně je určena maximální hodnota rezidua prvku určena pro číslo 993 a má hodnotu 1,25314...

Současně zkusíme dokázat Collatzovu domněnku i pomocí reziduí vláken.

### 3.1 Definice: Reziduum prvku o základu $Z$

Necht'  $Z$  je liché číslo. Pak reziduum prvku  $y$  nazveme výraz

$$Res_Z(y) = \frac{2^\beta \cdot Z}{3^{k+1} y}$$

kde

$$\beta = s_0 + s_1 + \dots + s_k$$

jsou indexy prvků v posloupnosti podle 1.9

$$Q(A_0) \subset Q(A_1) \subset \dots \subset Q(A_{k-1}) \subset Q(A_k)$$

a  $Z$  má v  $Q(A_0)$  index  $s_0$  a  $y$  má v  $Q(A_k)$  index  $s_k$ .

3.1.1 Lemma: Reziduum prvku a suma

$$Res_Z(y) = \frac{2^\beta \cdot Z}{3^{k+1}y} = \frac{1}{3^{k+1}y} \sum_{i=0}^k 3^i \cdot 2^{S_i}$$

$$Res_Z(y) = \frac{1}{y} \sum_{i=0}^k \frac{2^{S_i}}{3^{k+1-i}}$$

3.2 Definice: Cesta prvku a úplný index prvku

Nechť

$$Q(A_0) \subset Q(A_1) \subset \dots \subset Q(A_{k-1}) \subset Q(A_k)$$

$$Z \in Q(A_0)$$

$$A_1 = Z$$

$$A_2 \in Q(Z)$$

$$A_2 = a_1$$

...

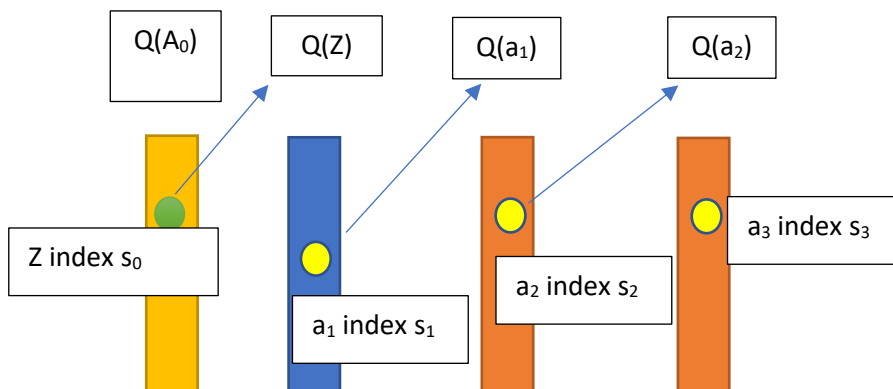
$$a_k = A_k \in Q(A_{k-1})$$

Posloupnost  $S_Z(A_k) = \langle Z, a_1, a_2, \dots, a_k \rangle$  nazveme cesta o základu  $Z$  k prvku  $A_k$ .

Posloupnost  $I_Z(A_k) = \langle s_0, s_1, s_2, \dots, s_k \rangle$  nazveme úplný index cesty o základu  $Z$  k prvku  $A_k$ .

Posloupnost  $S_Z(A_k) = \langle S_0, S_1, S_2, \dots, S_k \rangle$  nazveme  $S$ -vektor prvku o základu  $Z$  prvku  $A_k$ .

Ilustrace:



Prvky v  $Q(Z)$  jsou  $Y = \frac{2^{\alpha \cdot Z - 1}}{3}$

3.3 Definice: Index vlákna a řád vlákna v základu  $Z$

Nechť je  $Q(X)$  vlákno v posloupnosti

$$Q(Z) \subset Q(a_1) \subset \dots \subset Q(a_{k-1})$$

kde  $a_i \in Q(a_{i-1})$

Pak index vlákna je roven součtu úplného indexu základu vlákna a řád vlákna je pořadí indexu základu vlákna v úplném indexu.

Součet úplného indexu prvku budeme značit  $\beta$ , řád vlákna písmenem  $r$ .

### 3.4 Definice: Jádro vlákna se základem $Z$

Nechť je  $Q(X)$  vlákno,  $A$  je index vlákna a  $r$  je řád vlákna. Definujeme jádro vlákna jako  $J(X) = \frac{2^A}{3^{r \cdot X}}$ .

Poznámka: Jádro vlákna je reziduum základu vlákna.

#### 3.4.1 Lemma: Rezidua prvků ve vlákně

Nechť  $a \in Q(X)$  s indexem ve vlákně  $j$ . Pak  $Res_Z(a) = J(X) \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2^j X}}$ .

Důkaz:

$$Res_Z(a) = \frac{2^{\beta_Z}}{3^{r+1}a} = \frac{2^{A+j}}{3 \cdot 3^r a} = \frac{2^A}{3^r X} \cdot \frac{X \cdot 2^j}{3a} = J(X) \cdot \frac{X \cdot 2^j}{3 \cdot \frac{2^j X - 1}{3}} = J(X) \cdot \frac{X \cdot 2^j}{2^j X - 1} = J(X) \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2^j X}} \odot$$

Důsledek:

$$\frac{J(X)}{Res_Z(a)} = 1 - \frac{1}{2^j X} < 1$$

Poznámka: Rezidua prvků ve vlákně jsou vždy větší než jádro vlákna a limitně jdou k  $J(X)$ .

### 3.5 Věta: Jádro následného vlákna

Nechť  $Q(X)$  a  $Q(Y)$  jsou vlákna libovolné cesty,  $Y \in Q(X)$ ,  $Y$  má ve vlákně  $Q(X)$  index  $j$ . Pak  $J_Z(X) < J_Z(Y)$ .

Důkaz:

$$Res_Z(Y) = J(Y) = J(X) \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2^j X}}$$

$$\frac{J(X)}{J(Y)} = 1 - \frac{1}{2^j X} < 1$$

$$J_Z(X) < J_Z(Y) \odot$$

Poznámka: reziduum následného vlákna je vždy větší než reziduum předchozího vlákna.

### 3.6 Věta: Všechna vlákna mají stejné základní vlákno

Nechť  $\langle X_1, X_2, \dots, X_n \rangle$  a  $\langle Y_1, Y_2, \dots, Y_m \rangle$  jsou cesty, které vycházejí ze dvou základních vláken, které nemají předchůdce. Pak jsou tato základní vlákna totožná a jsou rovna  $Q(1)$ .

Důkaz:

$X_1 \in Q(Z_1)$  a  $Y_1 \in Q(Z_2)$ . Vlákna nemají předchůdce, podle věty 1.8 ovšem pak  $Z_1 = Z_2 = 1$ .  $\odot$

Důsledky:

$z=1$

$$2^\beta - 3^{k+1}y = \sum_{i=0}^k 3^i \cdot 2^{S_i}$$

$Res(a) = \frac{2^\beta}{3^{k+1}a} = \frac{1}{3^{k+1}a} \sum_{i=0}^k 3^i \cdot 2^{S_i}$  kde  
 $\beta = s_0 + s_1 + \dots + s_k$  a  $s_0$  je index prvku ve vlákne Q(1).

$$S_j = s_{j+1} + \dots + s_k = \beta - (s_0 + \dots + s_j)$$

$$S_k = 0$$

vlákno Q(1) má  $k=0$  a  $\beta = 0$ .

Exponent  $k$  pro příslušné vlákno pojmenujme řád vlákna, analogicky i řád prvku. Budeme značit  $r$ .

Řád vlákna Q(1) je 0.

**Úplnou cestou** budeme nyní rozumět cestu od vlákna Q(1).

### 3.7 Lemma: Nejmenší jádro vlákna

Nechť  $Res_z(X_1) = J_z(X_1) < J_z(X_2) < \dots < J_z(X_n)$ , kde  $\langle X_1, X_2, \dots, X_n \rangle$  je cesta. Pak pro libovolnou cestu existuje nejmenší  $J_z(X_1)$ .

Důkaz:

Největší reziduum prvku  $Res(a) = J(X) \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2^X}}$ , zřejmě největší jádro vlákna a maximální hodnota druhého výrazu. Jádro vlákna Q(X) je ovšem reziduum prvku z vlákna o řád menšího než vlákno Q(X). Tedy čím menší  $X$  a  $x$ , tím bude reziduum větší. Základním vlákem je vlákno řádu 0, pak nejmenším prvem ve vlákne, které generuje následné vlákno, je číslo 5,  $Res(5) = \frac{2^4}{3^{1 \cdot 5}} = \frac{16}{15}$  a tedy  $J(5) = \frac{16}{15} = 1.0\bar{6}$

Tedy každé další vlákno má jádro větší než 1,066...

☺

Poznámka: Číslo 1 má sice reziduum 1,3..., ale není základem následného vlákna. Reziduum základního vlákna je 1.

### 3.8 Věta: O jednoznačném určení prvku vlákna S – vektorem

Nechť posloupnost  $S(A) = \langle S_0, S_1, S_2, \dots, S_r \rangle$  je S – vektor prvku o základu 0 prvku A, kde  $S_j = s_0 + s_1 + \dots + s_j$ ,  $\langle s_0, s_1, s_2, \dots, s_r \rangle$  je úplný index prvku A,  $\beta = S_r$ ,  $T_j = \beta - S_j$ ,  $r$  je řád prvku.

Pak

$$A = \frac{2^\beta}{3^{r+1}} \cdot \left( 1 - \sum_{i=0}^r \frac{3^i}{2^{T_i}} \right)$$

Důkaz:

$$2^\beta - 3^{r+1}A = \sum_{i=0}^r 3^i \cdot 2^{S_i}$$

$$\frac{2^\beta}{3^{r+1}} - A = \frac{1}{3^{r+1}} \sum_{i=0}^r 3^i \cdot 2^{S_i} = \sum_{i=0}^r \frac{2^{S_i}}{3^{r+1-i}} \cdot$$

$$A = \frac{2^\beta}{3^{r+1}} - \sum_{i=0}^r \frac{2^{S_i}}{3^{r+1-i}} = \frac{2^\beta}{3^{r+1}} \cdot \left(1 - \sum_{i=0}^r \frac{2^{S_i-\beta}}{3^{-i}}\right) = \frac{2^\beta}{3^{r+1}} \cdot \left(1 - \sum_{i=0}^r \frac{3^i}{2^{\beta-S_i}}\right) = \frac{2^\beta}{3^{r+1}} \cdot \left(1 - \sum_{i=0}^r \frac{3^i}{2^{T_i}}\right)$$

☺

3.8.1 Důsledek: Reziduum vyjádřené vektorem T

$$Res_0(A) = \frac{2^\beta}{3^{r+1}A} = \frac{2^\beta}{3^{r+1} \cdot \frac{2^\beta}{3^{r+1}} \cdot \left(1 - \sum_{i=0}^r \frac{3^i}{2^{T_i}}\right)} = \frac{1}{1 - \sum_{i=0}^r \frac{3^i}{2^{T_i}}}$$

3.9 Věta: Omezení rezidua prvku shora

Pro každé A platí

$$1 \leq Res_0(A) < \approx 1,3421$$

Důkaz:

Z důsledku 2.8.1 ihned plyne

$$0 < \sum_{i=0}^r \frac{3^i}{2^{T_i}} < 1$$

Odhad pomocí geometrické posloupnosti:

Víme, že posloupnost  $T_i$  je neklesající posloupnost kladných celých čísel. Pro maximum součtu budeme požadovat, aby koeficienty  $t_i$  byly co nejmenší. V úvahu tedy pro  $t_i$  připadají nejmenší indexy ve vlákně, čísla 1,2,3,4. (1 a 2 pokud není první prvek ve vlákně dělitelný 3, 3 a 4 pokud je dělitelný 3).

Následné prvky posloupnosti  $T_i$  se budou lišit o 1,2,3,4.

$T_i$  budeme aproximovat nejjednodušší, tedy lineární funkcí  $a \cdot i + b$ .

Průměr  $a$  je větší než 2, a zvolme 3 (hodnotou funkce budou celá čísla).

Koeficient  $b$  je index prvku 1 ve vlákně  $Q(1)$ , tj.  $b=2$ .

$$\sum_{i=0}^r \frac{3^i}{2^{T_i}} < \sum_{i=0}^r \frac{3^i}{2^{ai+b}} = \frac{1}{2^b} \sum_{i=0}^r \left(\frac{3}{2^a}\right)^i = \frac{1}{2^b} \cdot \frac{1 - \left(\frac{3}{2^a}\right)^{r+1}}{1 - \frac{3}{2^a}} < \frac{1}{2^b} \cdot \frac{1}{1 - \frac{3}{2^a}} = 2^{a-b} \cdot \frac{1}{2^a - 3}$$

$$\sum_{i=0}^r \frac{3^i}{2^{T_i}} < 2^{a-b} \cdot \frac{1}{2^a - 3}$$

$$Res(Max) < \frac{1}{1 - 2^{a-b} \cdot \frac{1}{2^a - 3}} = \frac{2^a - 3}{2^a - 2^{a-b} - 3}$$

$$2^{3-2} \cdot \frac{1}{2^3 - 3} = \frac{2}{5}$$

$$Res(Max) < \frac{1}{1 - \frac{2}{5}} = \frac{5}{3} = 1,6 \dots$$

a integrální odhad, kde  $T_x$  je spojitá rostoucí funkce

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^r \frac{3^i}{2^{T_i}} &< \int_0^r \frac{3^x}{2^{T_x}} dx \approx \int_0^r \frac{3^x}{2^{ax+b}} dx = \frac{1}{2^b} \int_0^r \left(\frac{3}{2^a}\right)^x dx = \frac{1}{2^b} \int_0^r e^{x \cdot \ln \frac{3}{2^a}} dx = \frac{1}{2^b \cdot \ln \frac{3}{2^a}} \cdot \left[ e^{x \cdot \ln \frac{3}{2^a}} \right]_0^r \\ &= \frac{1}{2^b \cdot \ln \frac{3}{2^a}} \cdot \left[ e^{r \cdot \ln \frac{3}{2^a}} - 1 \right] = \frac{1}{2^b \cdot \ln \frac{3}{2^a}} \cdot \left[ \left(\frac{3}{2^a}\right)^r - 1 \right] \end{aligned}$$

pro  $a$  musí platit  $2^a > 3 \rightarrow a \ln 2 > \ln 3 \rightarrow a > \frac{\ln 3}{\ln 2} = 1,58496250$  a tedy  $\frac{3}{2^a} < 1$

Pak je integrál roven

$$I(a, b, r) = \frac{1}{2^b \cdot \ln \frac{3}{2^a}} \cdot \left[ 1 - \left(\frac{3}{2^a}\right)^r \right]$$

pro velká  $r$  je závorka rovna 1 tedy

$$I(a, b, \infty) = \frac{1}{2^b \cdot \ln \frac{3}{2^a}}$$

Pro  $a=3, b=2$

pak

$$Res(A) < \frac{1}{1 - I(3,2, \infty)} \approx \frac{1}{1 - 0,25488} \approx 1,3421$$

☺

Poznámka pro první řád

$$I(3,2,1) = \frac{1}{2^2 \cdot \ln \frac{3}{2^3}} \left[ 1 - \left(\frac{3}{2^3}\right)^1 \right] \approx 0,25488 \cdot \frac{5}{8} = 0,1593$$

a tedy

$$Res(A) < \frac{1}{1 - I(3,2,1)} \approx \frac{1}{1 - 0,1593} \approx 1,18948$$

kde např. pro  $Res(3) = 1,185185$

Poznámka: z experimentů plyne, že pro každé  $A$  je  $Res(A) \leq 1,25314 \dots$

## 4 Závěr:

I pokud se objeví v této teorii vláken chyby, doufám, že poskytne alespoň inspiraci dalším matematikům k dalším pokusům o řešení této domněnky..

Při provádění rešerše k danému problému jsem narazil na obrovskou spoustu literatury, v bibliografii uvádím jen nejdůležitější.

## 5 Bibliografie

Drakos, N. (30. 12 1995). *3x+1*. Načteno z <http://www.cecm.sfu.ca>:

<http://www.cecm.sfu.ca/organics/papers/lagarias/paper/html/node4.html#SECTION00022000000000000000>

Farin, E. (2022). *The Collatz Problem, Experimental Data and Models*. Načteno z

<http://collatz.freehostia.com/>: <http://collatz.freehostia.com/index.html>

Karami, D. (4 2020). *A NEW METHOD TO PROVE THE COLLATZ CONJECTURE*. Načteno z

<https://www.researchgate.net>:

[https://www.researchgate.net/publication/339998010\\_A\\_new\\_method\\_to\\_prove\\_the\\_Collatz\\_conjecture](https://www.researchgate.net/publication/339998010_A_new_method_to_prove_the_Collatz_conjecture)

Lagarias, J. C. (2010). *THE 3x + 1 PROBLEM: AN OVERVIEW*. Načteno z <https://arxiv.org>:

<https://arxiv.org/pdf/2111.02635.pdf>

Roosendaal, E. (2020). *On the 3x + 1 problem*. Načteno z <http://www.ericr.nl>:

<http://www.ericr.nl/wondrous/index.html#part2>

Wikipedie. (22. 3 2022). *Collatzův problém*. Načteno z Wikipedie:

<[https://cs.wikipedia.org/w/index.php?title=Collatz%C5%AFv\\_prob%C3%A9m&oldid=21053897](https://cs.wikipedia.org/w/index.php?title=Collatz%C5%AFv_prob%C3%A9m&oldid=21053897)>