

Lineární rovnice ve 20 minutách

Mgr. Pavel Hrubý

Obsah

Úvod	1
Ta se do toho pustíme (motivační příklad).....	2
Můžeme to nějak matematicky zapsat?.....	2
Co musíme umět	2
Ach ty písmenka	2
A zkusíme si nějaké příklady na lineární rovnice.....	2
A proč zkouška řešení?	3
A dáme si takový malý testík.....	4
A co když nám vyjde blbost?	4
A čteme písmenka (obecná teorie)	5
Asi to bude v písemce.....	5
A jdeme do života.....	6
Jdeme na to, zatím nanečisto (závěrečný test)	7
Literatura a odkazy.....	7

Úvod

Metodik výkladu k tématu lineárních rovnic je nepřehledné množství. V tomto materiálu je použita moje metodika, kterou jsem si za léta praxe ověřil a se kterou jsem byl celkem spokojen. Při doučování pak kladu důraz na spočítání co nejvíce úloh s důrazem na to, aby žák vždy obhájil každý krok řešení. Všechny příklady ovšem nelze vyřešit při reálné konzultaci, většinu příkladů proto zadávám jako domácí cvičení s následnou kontrolou při dalším sezení nebo po zaslání řešení e-mailem. Vždy je nutné si ponechat rezervu na zopakování pojmů a postupů, které by měl mít žák již zažit z dřívějších. Vždy jsem narazil na problém se znalostmi žáka, které se týkají zlomků a úprav výrazů. S tím jsem se smířil a metodiku v tom zohledňuji.

Titulek článku je nadnesený, reálná časová dispozice jsou dvě až tři hodinové konzultace.

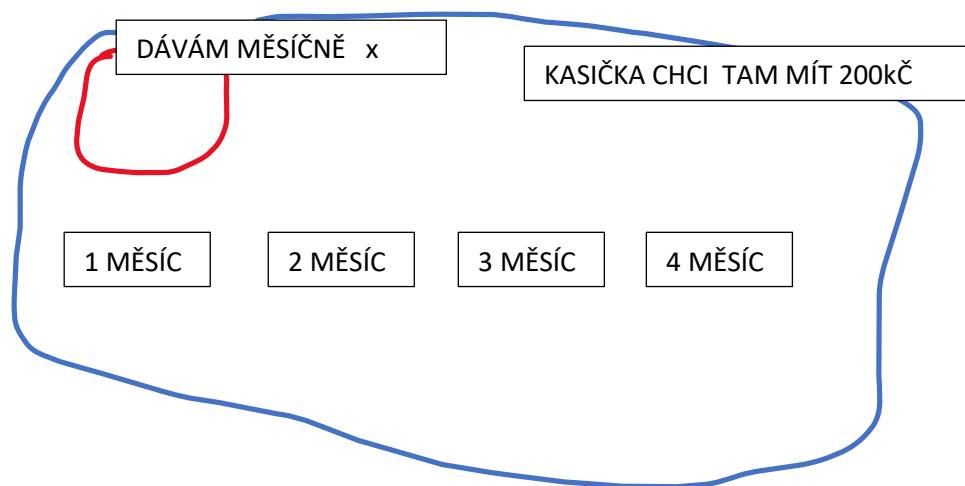
Pokud někomu tento materiál pomůže, pak jsem spokojen.

Přeji mnoho zdaru.

Pavel

Ta se do toho pustíme (motivační příklad)

Kolik peněz si musíš ukládat měsíčně do prázdné kasičky abys po 4 měsících si měla v kasičce 200 korun? (pozn.: každý měsíc dáváš do kasičky stejnou sumu)



Můžeme to nějak matematicky zapsat?

Asi ano. Matematizací úlohy je rovnice $4x = 200$.

Co musíme umět

(vstupní předpoklady a jejich jednoduchý test - úpravy číselných výrazů – závorky, zlomky, platnost výrazu)

$$(x + 3) - (7x \cdot 3) + 12x =$$

$$\frac{x}{2} + \frac{3x}{72} - x \cdot \frac{45}{8} - \frac{x^2}{2} =$$

$$\frac{x-2}{x-1} + \frac{x+2}{x+1} =$$

**Základní poučka
elementární
matematiky**

Nulou nelze dělit.

Ach ty písmenka

Ať si nezvykneme jen na x

$$(a - 3)^2 - (a + 3)^2 - 12a =$$

A zkusíme si nějaké příklady na lineární rovnice

Jedna úloha krok po kroku (jedná se o ekvivalentní úpravu rovnice – co to je?)

$$2(x + 3) - 4(x - 3) = -12x$$

„Zničíme“ závorky

$$2x + 6 - 4x + 12 = -12x$$

K oběma stranám rovnice přičteme $+12x$ – jinak přehodíme

$-12x$ na druhou stranu a změníme znaménko (to je ekvivalentní úprava)

$$2x + 6 - 4x + 12 + 12x = 0$$

**EKVIVALENTNÍ ÚPRAVA
ROVNICE NEMĚNÍ MNOŽINU
KOŘENŮ TÉTO ROVNICE.**

Upravíme výraz – sečteme výrazy s x a čísla

$$10x + 18 = 0$$

Osamostatníme výraz s x na levé straně – takže na levé straně bude výraz s x a na pravé straně jen číslo

$$10x = -18$$

Vydělíme pravou i levou stranu rovnice 10 (i to je ekvivalentní úprava – 10 je číslo různé od nuly)

$$x = -\frac{18}{10}$$

A je dobré výsledný zlomek zkrátit

$$x = -\frac{9}{5}$$

A ještě zapíšeme řešení

$$K = \left\{ -\frac{9}{5} \right\}$$

Což čteme: „Množina kořenů rovnice je jednoprvková množina s prvkem (kořenem) $-\frac{9}{5}$ “

Co jsme to provedli? Osvobodili jsme x !

A proč zkouška řešení?

A co tahle rovnice

$$\frac{x-2}{x-1} = -2$$

Vynásobíme obě strany rovnice výrazem $x - 1$. Ovšem násobení výrazem $x - 1$ není ekvivalentní úprava – takže z budoucího řešení musíme vyloučit číslo 1, protože pak by ve zlomku ve jmenovateli vyšla 0 a nulou nelze dělit. Tedy zkouška bude povinnou součástí řešení.

$$x - 2 = -2(x - 1)$$

Dále již bez komplikací a zádrhelů

$$x - 2 = -2x + 2$$

$$3x = 4$$

$$x = \frac{4}{3}$$

Pokud se v průběhu řešení vyskytne neekvivalentní úprava provádí se povinná zkouška (a tady si rychle zopakujeme práci se zlomky).

$$L: \frac{\frac{4}{3} - 2}{\frac{4}{3} - 1} = \frac{\frac{4-6}{3}}{\frac{4-3}{3}} = \frac{4-6}{4-3} = \frac{-2}{1} = -2$$

$$P: -2$$

$$L = P$$

A teprve teď můžeme zapsat výsledek

$$K = \left\{\frac{4}{3}\right\}$$

Přečti mi výsledek.

Poznámka: Pokud zkouška není povinnou součástí řešení, můžeme ji i tak provést, ale budeme ji raději nazývat ověření výsledku.

A dáme si takový malý testík

V množině R řešte rovnice

$$\frac{x+7}{2x+2} - \frac{x+4}{4x+4} = 1$$

výsledek $K = \{2\}$

$$\frac{1}{2}\left(3x - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{3}\left(4x - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{4}(6x - 5) - \frac{2}{3}$$

výsledek $K = \left\{\frac{4}{3}\right\}$

A co když nám vyjde blbost?

($0=0$, $1=0$)

$$x + \frac{1}{x} + 1 = \frac{x^2 - 1}{x} + 1$$

Co vyšlo?

$$-1 = 1$$

To evidentně není pravda, proto rovnice nemá řešení, což zapíšeme $K = \emptyset$ (značka pro prázdnou množinu)

A ještě

$$2(x-3) = \frac{8x-24}{4}$$

Co vyšlo?

$$2 = 2$$

Také tady neznámá x úplně vymizela, ale výsledek je pravdivé tvrzení. V takovémto případě má úloha nekonečně mnoho řešení, zapíšeme $K = R$ (R je množina všech reálných čísel).

Poznámka: pokud existují nějaké podmínky existence výrazů v rovnici, musíme je ve výsledném řešení vzít v úvahu.

Poznámka: všechny rovnice řešíme v R , „chytákem“ je zadání – řešte v N , řešte v Z ,...

Některé vzorečky

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

A čteme písmenka (obecná teorie)

Lineární rovnice může mít mnoho různých tvarů. Abychom mohli lineární rovnice nějak hezky řešit, potřebujeme je upravit na základní tvar. Základní tvar lineární rovnice vypadá takto:

$$ax + b = 0$$

kde x je neznámá a symboly a a b jsou libovolná reálná čísla. Přitom číslo a nesmí být nulové, tj. $a \neq 0$. Výrazu ax říkáme lineární člen, výrazu b říkáme absolutní člen.

Asi to bude v písemce

(příklady na procvičení - jednodušší)

a) $2(x-1) - 3(x-2) + 4(x-3) = 2(x+5)$

k) $(6x-5)(x-2) - (3x-1)(2x-3) = 4$

b) $2(3+4x) - 2 = 3 - 5(1-x)$

l) $(x+2)(x-2) - (x-3)^2 = -1$

c) $\frac{a}{3} - \frac{5}{3} - \frac{a-3}{4} = \frac{3}{4} + 1$

m) $x - 4 \cdot [x - 2(x+6)] = 5x + 3$

d) $\frac{5}{3}(t-2) - \frac{4}{5}(2t-5) = 4 - \frac{3}{2}(t-3)$

n) $\frac{3x-1}{5} - \frac{5x+1}{6} = \frac{x+1}{8} - 3$

e) $\frac{9x+7}{2} - \left(x - \frac{x-2}{7}\right) = 36$

o) $\frac{1-7x}{8} - \frac{x+30}{3} - \frac{x-1}{5} = 3$

f) $x - (x-3) \cdot 2 = \frac{x}{2} + 7 + x$

p) $\frac{4x+1}{3} - \frac{3x-1}{5} = 15 - \frac{25-x}{4}$

g) $8(x-3) + 6(2x-1) = 8(4x-2) - 2(6x+7)$

q) $x + 1\frac{1}{2}x + 9 = \frac{2}{3}x + 4 + \frac{5}{6}x - \frac{6}{5}x + \frac{1}{5}$

h) $\frac{1+16a}{7} = \frac{5a-4}{2}$

r) $\frac{4}{5}x - 2\frac{1}{2}x - 2 = -2\frac{1}{3}x - \frac{1}{6} - \frac{1}{5}$

i) $(x+2)(x-3) = (x-5)(x-6)$

s) $(x-3)(x+4) - 2(3x-2) = (x-4)^2$

j) $\left(2x - \frac{3}{2}\right)(x-1) = (2x-1)\left(x - \frac{5}{2}\right)$

t) $(x+5)(x+2) - 3(4x-3) = (x-5)^2$

A jdeme do života

(příklady – slovní úlohy a jejich matematizace)

Řešená úloha

Na školním výletě ušli žáci za tři dny celkem 50 km. První den ušli dvakrát tolik jako třetí den, druhý den ušli o deset kilometrů méně než první den. Kolik kilometrů ušli v jednotlivých dnech?

Řešení:

Matematizace úlohy:

Neznámý počet ušlých kilometrů za třetí den si označíme x . Pak první den ušli $2x$ kilometrů a druhý den $2x-10$ kilometrů. Celkem ušli 50 km.

Pak platí:

Matematická část

$$2x + 2x - 10 + x = 50$$

Rovnici vyřešíme $x = 12$

Odpověď

A nezapomeneme slovní odpověď: Žáci ušli na školním výletě první den 24 km, druhý den 14 km a třetí den 12 km.

Neřešené úlohy

1. V obou paralelních třídách stejného ročníku se psala pololetní písemná práce z matematiky. Desetina všech žáků dostala jedničku, třetina dvojku, trojku dostaly čtyři patnáctiny všech žáků a čtyřku pětina. Kolik žáků psalo písemku, když pětku měli tři žáci? (*Písemku psalo celkem 30 žáků.*)
2. Na dvoře pobíhají slepice a kočky. Sečteme-li všechny hlavy, napočítáme číslo 32. Sečteme-li všechny nohy, dostaneme počet 82. Kolik je na dvoře slepic? (*Na dvoře je 23 slepic a 9 koček.*)
3. Žofka chtěla přečíst novou knihu o upírech za týden, ale v knihovně ji musí vrátit už za 6 dnů. Spočítala si, že tedy musí za den přečíst o 4 stránky víc. Kolik má kniha stran? (*Kniha má 168 stran.*)

Jdeme na to, zatím nanečisto (závěrečný test)

Vyřeš rovnici, udělej zkoušku a urči také podmínky řešitelnosti.

Náhodně si zvol tři příklady.

a)
$$\frac{1}{x+1} = \frac{1}{2x}$$

b)
$$\frac{x-4}{x-8} = 5$$

c)
$$\frac{3x-4}{4x-3} = 1\frac{1}{2}$$

d)
$$\frac{3}{x-5} + 2 = \frac{5}{5-x}$$

e)
$$\frac{2t+3}{3t+1} - \frac{t+5}{3t+1} = \frac{1}{4}$$

f)
$$\frac{1}{x-3} + \frac{2}{x-4} = \frac{5}{(x-3)(x-4)}$$

g)
$$\frac{1}{3} - \frac{23-x}{3x} = \frac{7}{12} - \frac{1}{4x} - \frac{7}{x}$$

h)
$$\frac{x+7}{2x+2} = 1 + \frac{x+4}{4x+4}$$

i)
$$\frac{1+x}{x-1} - \frac{3+x}{x+1} = \frac{4}{x+1}$$

j)
$$\frac{12-7y}{y-1} = \frac{4}{y+1} - 7$$

k)
$$\frac{4}{x-3} - \frac{3}{x-2} = \frac{1}{x-4}$$

l)
$$2 - \frac{4x+3}{x+x^2} = \frac{2x}{x+1} - \frac{5}{x}$$

m)
$$\frac{y+5}{y-7} - 2 = -\frac{y+7}{y-5}$$

n)
$$1 - \frac{5}{2y+6} = \frac{3}{y+3}$$

o)
$$\frac{x+2}{2x+2} - \frac{1}{2} = -\frac{x+4}{4x+4}$$

p)
$$\frac{z-5}{z} + \frac{3z+1}{z-3} = 4$$

q)
$$\frac{2h+1}{h} = \frac{6h}{3h-1}$$

r)
$$\frac{2x+5}{6} + \frac{10}{x-3} = \frac{2x-3}{6}$$

s)
$$\frac{11}{x^2-5x} + \frac{6}{x^2+4x} + \frac{4}{(x+4)(x-5)} = 0$$

t)
$$\frac{x+7}{x-5} - 2 = -\frac{5+x}{x-7}$$

Literatura a odkazy

<https://www.matweb.cz/linearni-rovnice/>

https://www.matematikavsem.cz/data/matematika/Metodika_pro%20ucitele%20SS.pdf

<https://www.priklady.eu/cs/matematika/linearni-rovnice.alej>

<https://www.priklady.com/cs/index.php/rovnice-a-nerovnice>

<https://kap.kr->

jihomoravsky.cz/uploads/attachment/attachment/attachment_file/4736/Slovn%C3%AD%C3%BAlohy%C5%99e%C5%A1en%C3%A9_line%C3%A1rn%C3%AD_rovnic%C3%AD.pdf