

Exponenciální rovnice krokem

Pavel Hrubý

Obsah

Úvod	1
Typy rovnic	2
První typ rovnic.....	2
První úloha.....	2
Druhá úloha.....	2
Třetí úloha	3
Příklady na procvičení.....	4
Druhý typ rovnic	5
Třetí typ	5
Kombinované úlohy.....	6
Kombinované úlohy na procvičení	7
Dodatek pro nadšence	9
Lambertova W-funkce	9
Zajímavé úlohy	11
Závěr	12
Zdroje a odkazy	12

Úvod

Nyní se dostáváme k rovnicím, které mají neznámou v exponentu. Příkladem takové rovnice je např.: $3^x = 9$. Takovou rovnici ovšem rychle vyřešíte z paměti. Jiný příklad $3^{2x+1} = 9^{x-1}$ je už složitější a rovnici $3^x = 2x + 2$ již umíme řešit jen graficky (no, to není tak úplně pravda, ale více se dozvíme v závěru tohoto článku). A ještě jedna poznámka – budeme rovnice řešit jen pro reálná čísla.

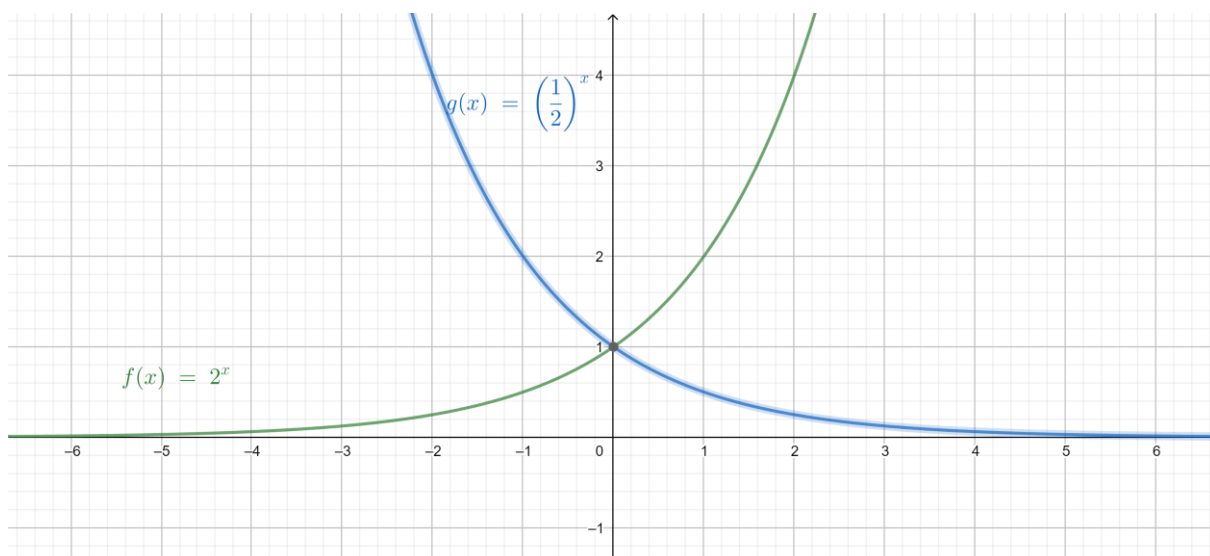
Pro výpočetní účely si rozdělíme exponenciální rovnice podle postupů řešení. Není to zase tak jednoznačné, někdy musíme tyto postupy kombinovat.

Co budeme potřebovat z dřívějších znalostí? Určitě všechny poučky o počítání s mocninami a odmocninami a vše co jste se dozvěděli o úpravě algebraických výrazů. Vzorečky si ovšem částečně zopakujeme.

Ještě, než se pustíme do rovnic, je třeba alespoň něco málo si říct o nejjednodušší exponenciální funkci $f: y = a^x$ kde a (základ mocniny) a x (exponent) jsou reálná čísla a číslo a bude kladné číslo různé od 1.

Definici „vyzkoušíme“ pomocí grafů pro základy $a=2$ a $a=1/2$.

Základní vlastnosti „odečteme“ z grafů příslušných funkcí.



Pro $a > 1$ je funkce rostoucí, pro $0 < a < 1$ je klesající. Všechny grafy procházejí bodem $[0, 1]$. V nekonečnu jde graf funkce $y = 2^x$ do nekonečna v mínus nekonečnu jde k nule. V nekonečnu jde graf funkce $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ k nule, v mínus nekonečnu jde k nekonečnu. Grafy nikde nejsou menší než nula, tedy nezasahují pod osu x .

A ještě jedna důležitá poznámka.

Platí vztah (1): Vtah $a^X = a^Y$ platí právě když $X = Y$, kde X a Y jsou libovolné výrazy. Řečeno slovně: pokud jsou na obou stranách rovnice stejné základy, jsou si rovny i exponenty.

Z tohoto vztahu vychází řešení prvního typu rovnic.

Typy rovnic

První typ rovnic

Celé umění je převést základy na obou stranách rovnice na stejné číslo – to předpokládá zvládnutí práce s mocninami.

První úloha

$$3^{x-5} = 1$$

Využijeme poslední vztah z rámečku, platí $3^0 = 1$

$$3^{x-5} = 3^0$$

A použijeme vztah (1).

$$x - 5 = 0$$

$$x = 5$$

Nezapomenout na odpověď $K = \{5\}$.

Druhá úloha

$$2^{2x} = 8^{x-1}$$

$$2^{2x} = (2^3)^{x-1}$$

$$2^{2x} = 2^{3(x-1)}$$

A použijeme vztah (1).

OPAKOVÁNÍ – některé vzorečky pro mocniny a odmocniny

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$(a^x)^y = (a^y)^x = a^{x \cdot y}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

$$\frac{1}{a^x} = a^{-x}$$

$$a^0 = 1$$

$$2x = 3(x - 1)$$

$$2x = 3x - 3$$

$$-x = -3$$

$$x = 3$$

Nezapomenout na odpověď $K = \{3\}$.

Třetí úloha

$$4 \cdot 2^{x+1} = \left(\frac{1}{8}\right)^{2x-3}$$

$$2^2 \cdot 2^{x+1} = (2^{-3})^{2x-3}$$

$$2^{2+x+1} = 2^{-3 \cdot (2x-3)}$$

$$2^{3+x} = 2^{-6x+9} \text{ a použijeme vztah (1)}$$

$$3 + x = -6x + 9$$

$$7x = 6$$

$$x = \frac{6}{7}$$

Nezapomenout na odpověď $K = \left\{\frac{6}{7}\right\}$.

Poznámka

U těchto typů úloh nejsou zkoušky výsledků povinnou součástí řešení.

A ještě nezapomenout

$$\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$$

$$a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$$

Příklady na procvičení

a) $3^{2x} = 9$

b) $5^{3x+2} = 25^{x-1}$

c) $2^{3-x} = 4^{2-x}$

d) $8^{-x} = 2^{x-8}$

e) $\left(\frac{1}{4}\right)^{x-1} = 4^{2-3x}$

f) $5^{3x+2} = 25^{x-1}$

g) $4^x = 2^{x+1}$

h) $8^{2x+1} = \left(\frac{1}{16}\right)^{3-2x}$

i) $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x} = 2^{-x-1}$

j) $2^{-3x+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x-1}$

k) $2^{x-1} = \left(\frac{1}{4}\right)^{2-4x}$

l) $\left(\frac{1}{27}\right)^{4-x} = 9^{2x}$

m) $\left(\frac{3}{5}\right)^x = \left(\frac{5}{3}\right)^3$

n) $2^{3x-4} = \left(\frac{1}{8}\right)^{x+1}$

o) $4^{1-x} = \left(\frac{1}{4}\right)^{2x-3}$

p) $10^x = 0,1 \cdot 1000^{x-1}$

q) $27 \cdot 27^{2x-3} = 81^{3x-5}$

r) $4 \cdot 2^{x+1} = \left(\frac{1}{8}\right)^{2x-3}$

s) $4^x = 16^{2-x}$

t) $4^{x-2} = 0,125$

u) $\left(\frac{1}{8}\right)^{-x} = \left(\frac{1}{32}\right)^{1-x}$

v) $\left(\frac{1}{243}\right)^{2x} = 81^{1-x}$

w) $\left(\frac{1}{125}\right)^{-3x-1} = 25^{-x-1}$

x) $3^{x-2} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2x}$

y) $\left(\frac{1}{3}\right)^{1-x} = 243^{-x-1}$

z) $5^{3x+2-(1-x)} = 125^{2x-1-x}$

U některých výše uvedených příkladů je dobré si pamatovat některé mocniny nebo alespoň mít po ruce tabulky vyšších mocnin čísel 2, 3, 5, 7,... Vlevo ve sloupci je exponent, v prvním řádku jsou základy, tj. $5^4=625$.

	2	3	5	7	11
2	4	9	25	49	121
3	8	27	125	343	1331
4	16	81	625	2387	
5	32	243	3125		
6	64	729			
7	128				
8	256				

Druhý typ rovnic

Při řešení použijeme takzvanou substituci – nahrazení jednoho výrazu jiným výrazem. Vznikne nám nová rovnice. Tu vyřešíme a pak provedeme zpětnou substituci.

V těchto rovnicích se zpravidla objevuje součet mocnin.

Příklad 1

$$4^{\frac{2}{x}} + 4 = 5 \cdot 4^{\frac{1}{x}}$$

$$\left(4^{\frac{1}{x}}\right)^2 + 4 = 5 \cdot 4^{\frac{1}{x}}$$

Substituce

$$t = 4^{\frac{1}{x}}$$

$$t^2 + 4 = 5t$$

$$t^2 - 5t + 4 = 0$$

A řešíme kvadratickou rovnici

Diskriminant

$$D = (-5)^2 - 4 \cdot 4 = 9$$

$$t = \frac{5 \pm 3}{2} = 1 \text{ nebo } 4$$

Zpětná substituce vede na rovnice

$$1 = 4^{\frac{1}{x}}$$

$$4 = 4^{\frac{1}{x}}$$

První rovnice nemá řešení v reálných číslech (napíšte proč?)

Druhá rovnice má řešení $x=1$.

Nezapomenout na odpověď $K = \{1\}$.

Třetí typ

Logaritmování

U těchto typů příkladů nečekejte „hezká“ řešení. Výsledek bude ve většině případů nějaká kombinace logaritmů a číselně se tedy dá vyjádřit pouze přibližně.

Příklad 1

$$2^{x+1} = 5 \cdot 3^x$$

$$2 \cdot 2^x = 5 \cdot 3^x$$

$$\frac{2^x}{3^x} = \frac{5}{2}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{5}{2}$$

OPAKOVÁNÍ KVADRATICKÁ ROVNICE

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Diskriminant

$$D = b^2 - 4ac$$

Pokud je diskriminant nezáporný, pak

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

A můžeme logaritmovat

$$x \cdot \log \frac{2}{3} = \log \frac{5}{2}$$

$$x = \frac{\log \frac{5}{2}}{\log \frac{2}{3}} = \frac{\log 5 - \log 2}{\log 2 - \log 3}$$

$$\text{A tedy výsledek } K = \left\{ \frac{\log 5 - \log 2}{\log 2 - \log 3} \right\}$$

A také určitě použijeme

$$a^{\log_a b} = b$$

Může se hodit

e – Eulerovo číslo je základem přirozených logaritmů, používáme zkratku $\ln$

$$\log_e a = \ln a$$

Příklad 2

$$2^x \cdot 5^{2x} = 3^{x-2}$$

Budeme se snažit provést úpravy rovnice tak, abychom dostali výraz tvaru

$$A^x = B$$

, který pak můžeme logaritmovat. A, B musí být kladná čísla, A různé od 1.

$$2^x \cdot 25^x = \frac{1}{9} \cdot 3^x$$

$$50^x = \frac{1}{9} \cdot 3^x$$

$$\left(\frac{50}{3}\right)^x = \frac{1}{9}$$

$$x \cdot \log \frac{50}{3} = \log \frac{1}{9}$$

$$x = \frac{-\log 9}{\log 50 - \log 3}$$

Výsledek po úpravě

$$K = \left\{ \frac{2 \log 3}{\log 3 - 2 \log 5 - \log 2} \right\}$$

Kombinované úlohy

Při řešení následujících úloh využijeme dříve vysvětlené postupy. Základem postupů jsou ovšem úpravy výrazů v rovnicích tak, aby šlo úlohy řešit. Všechny úlohy mají řešení v reálných číslech a řešení lze vyjádřit jako množinu kořenů dané rovnice. Postupy většinou nejsou na první pohled zřejmé a místy bude třeba trochu experimentovat.

Příklad

$$6^x - 2^x = 2^{x+1} - 6^{x+1} + 2^{x+2}$$

$$6^x + 6^{x+1} = 2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2}$$

Zde využijeme vytýkání, neboť

$$6^x + 6 \cdot 6^x = 2^x + 2 \cdot 2^x + 2^2 \cdot 2^x$$

$$6^x(1+6) = 2^x(1+2+4)$$

$$7 \cdot 6^x = 7 \cdot 2^x$$

$$2^x \cdot 3^x = 2^x$$

$$3^x = 1$$

$$x = 0$$

Provedeme ověření výsledku (zkouška jako taková není nutnou součástí řešení)

$$6^0 - 2^0 = 2^1 - 6^1 + 2^2$$

$$0 = 2 - 6 + 4 \text{ což platí}$$

Nezapomenout na odpověď $K = \{0\}$.

Kombinované úlohy na procvičení

$$\text{a)} \quad 4^{\frac{2}{x}} + 4 = 5 \cdot 4^{\frac{1}{x}}$$

$$\text{b)} \quad 5^{2x} - 7^x - 5^{2x} \cdot 35 + 7^x \cdot 35 = 0$$

$$\text{c)} \quad 4 \cdot 3^{x+1} - 72 = 3^{x+2} + 3^{x-1}$$

$$\text{d)} \quad 5^{x-1} = 10^x \cdot 2^{-x} \cdot 5^{x+1}$$

$$\text{e)} \quad 4^{x^2+2} + 8 = 9 \cdot 2^{x^2+2}$$

$$\text{f)} \quad 64 \cdot 9^x - 84 \cdot 12^x + 27 \cdot 16^x = 0$$

$$\text{g)} \quad 9^{|3x-1|} = 3^{8x-2}$$

$$\text{h)} \quad 2 \cdot 81^x - 5 \cdot 36^x + 3 \cdot 16^x = 0$$

$$\text{i)} \quad 3^{2x-3} - 9^{x-1} + 27^{\frac{2x}{3}} = 675$$

$$\text{j)} \quad 0,25^{(-1) \cdot \sqrt{x+1}} = 64 \cdot 2^{\sqrt{x+1}}$$

$$\text{k)} \quad 7^{x+2} - 7^{-1} \cdot 7^{x+1} = 48 + 14 \cdot 7^{x-1} - 2 \cdot 7^x$$

$$\text{l)} \quad 64^{\frac{1}{x}} = 2^{\frac{3+\frac{3}{x}}{x}} - 12$$

$$\text{m)} \quad 4^x \cdot 5^{x+1} = 5 \cdot 20^{2-x}$$

$$\text{n)} \quad 3 \cdot 2^{\frac{x}{2}} - 20 = 7 \cdot 2^{\frac{x}{4}}$$

$$\text{o)} \quad 9^x + 6^x = 2 \cdot 4^x$$

$$\text{p)} \quad x^2 \cdot 2^{x+1} + 2^{|x-3|+2} = x^2 \cdot 2^{|x-3|+4} + 2^{x-1}$$

$$\text{q)} \quad 6^x - 4 \cdot 3^x = 3 \cdot 2^x - 12$$

$$\text{r)} \quad (3^{x^2-7,2x+3,9} - 9\sqrt{3}) \cdot \log(7-x) = 0$$

$$\text{s)} \quad 28 - 2 \cdot \log_2 \sqrt{2} = 4 \cdot 3^{2x+5} - 3^{4x+8}$$

$$\text{t)} \quad 3^{2x+1} = 3^{x+2} + \sqrt{1-6 \cdot 3^x} + 3^{2(x+1)}$$

$$\text{u)} \quad 6^x - 2^x = 2^{x+1} - 6^{x+1} + 2^{x+2}$$

$$\text{v)} \quad 6 \cdot 9^{\frac{1}{x}} - 13 \cdot 6^{\frac{1}{x}} + 6 \cdot 4^{\frac{1}{x}} = 0$$

$$\text{w)} \quad 9^{1+\log_3 x} - 3^{1+\log_3 x} - 210 = 0$$

$$\text{x)} \quad 100x^{\log x-2} + x^{2-\log x} - 20 = 0$$

$$\text{y)} \quad 2^{\frac{x}{2}} - 3^{\frac{x}{2}-1} = 2^{\frac{x}{2}-1}$$

$$\text{z)} \quad (\sqrt{5} + \sqrt{24})^x - 10 = (\sqrt{5} - \sqrt{24})^x$$

Tak alespoň jedna ukázka řešení úlohy, u které není postup na první pohled vůbec zřejmý např. úloha x).

$$100 \cdot x^{\log x-2} + x^{2-\log x} - 20 = 0$$

Určitě nepůjde vytknout $x^{\log x - 2}$, (to nikam nevede) rovnici si tedy přepíšeme

Když nám dojde, že

$$x^{2-\log x} = \frac{1}{x^{\log x - 2}}$$

pak

$$100 \cdot x^{\log x - 2} + \frac{1}{x^{\log x - 2}} - 20 = 0$$

Zkusme substituci $t = x^{\log x - 2}$

$$100 \cdot t + \frac{1}{t} - 20 = 0$$

Vynásobíme rovnici t a vyřešíme jako kvadratickou rovnici. Pro t různé od nuly platí

$$100 \cdot t^2 - 20t + 1 = 0$$

tj.

$$t_{1,2} = \frac{20 \pm \sqrt{400 - 400}}{200} = \frac{1}{10}$$

Takže máme jedno řešení a teď zpětnou substituci

$$x^{\log x - 2} = \frac{1}{10}$$

Tady nám nezbyvá nic jiného než logaritmovat

$$\log(x^{\log x - 2}) = \log \frac{1}{10} \text{ tj.}$$

$$(\log x - 2) \log x = -1$$

Tedy

$\log^2 x - 2 \log x + 1 = 0$ a ejhle, po $u = \log x$ substituci kvadratická rovnice

$u^2 - 2u + 1 = 0$ ale to je přece vzoreček

$$(u - 1)^2 = 0$$

Tak řešení je $u=1$ a zpětná substituce pro u

$\log x = 1$ a máme

$$x = 10$$

A ověříme výsledek pro $\log x = 1$, $x=10$

$$100 \cdot 10^{1-2} + 10^{2-1} - 20 = 0$$

$$100 \cdot 10^{-1} + 10^1 - 20 = 0$$

$$10 + 10 - 20 = 0$$

A jsme u konce

$$K = \{10\}$$

Dodatek pro nadšence

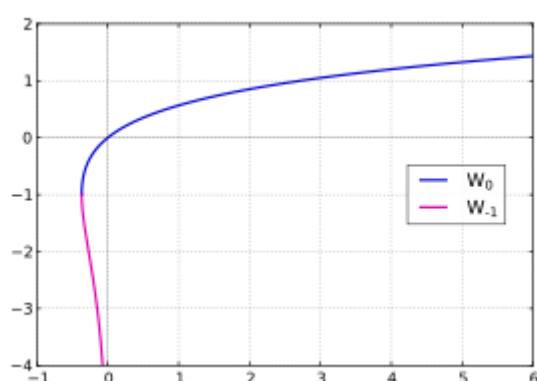
Ve středoškolských příkladech se může vyskytnout rovnice např. $3^x = 2x + 2$, kde bývá uvedeno – řešte graficky. Tyto typy úloh lze ovšem řešit za použití málo známé Lambertovy funkce W .

Lambertova W -funkce

Je funkce, kterou značíme $W()$ a je definována jako inverzní funkce k funkci $f: y = xe^x$.

Pak $x = W(y)$. Pro hlubší seznámení odkazují na Wikipedii (anglicky). Řešení spočívá v postupu, kterým na jedné straně rovnice po úpravě dostaneme výraz Ae^A a na druhé straně rovnice číslo (to musí být větší než $-\frac{1}{e}$, jinak rovnice nemá v reálných číslech řešení. Ono to je trochu složitější, protože inverzní relace k $f: y = xe^x$ má dvě větve pro $-\frac{1}{e} \leq x < 0$.

Graf relace W pak vypadá takto (W_0 a W_{-1} jsou větve Lambertovy funkce)



Úloha

Řešme rovnici $3^x = 2x + 2$

Upravíme na tvar

$$(x+1)3^{-x} = \frac{1}{2}$$

$$(-x-1)3^{-x} = -\frac{1}{2}$$

$$(-x-1)3^{-x} \cdot 3^{-1} = -\frac{1}{2} \cdot 3^{-1}$$

$$(-x-1)3^{-x-1} = -\frac{1}{6}$$

$$(-x-1)e^{(-x-1)\ln 3} = -\frac{1}{6}$$

$$\ln 3 (-x-1)e^{\ln 3 (-x-1)} = \frac{-\ln 3}{6}$$

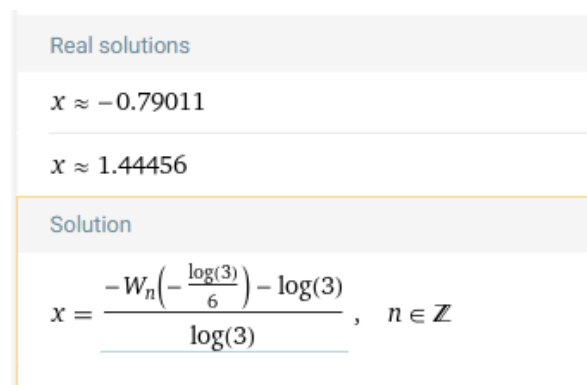
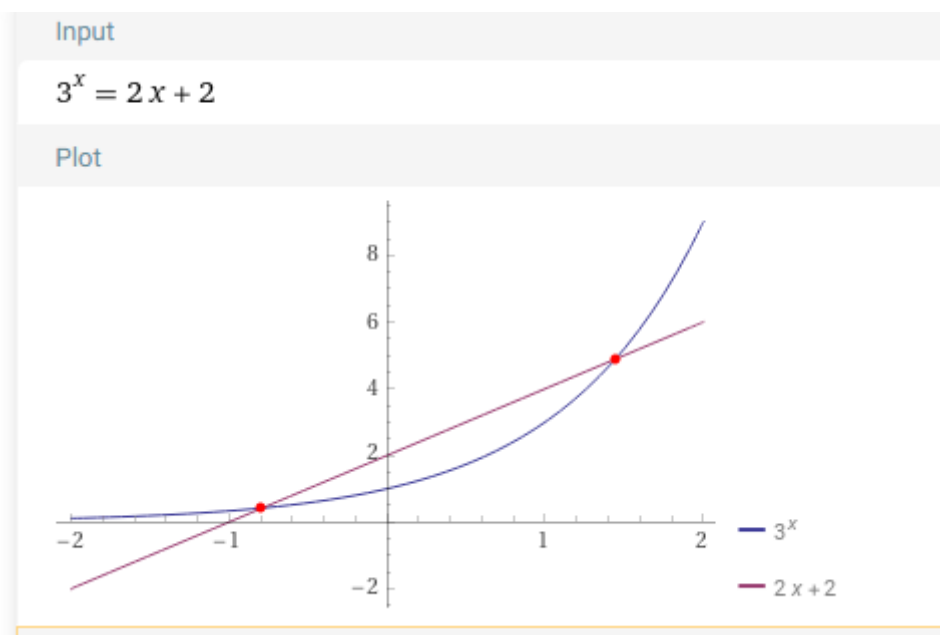
Ale $-\frac{1}{e} \leq \frac{-\ln 3}{6} < 0$, tak úloha bude mít dvě řešení

$$W\left(-\frac{\ln 3}{6}\right) = \ln 3 (-x-1) \text{ a tedy } x$$

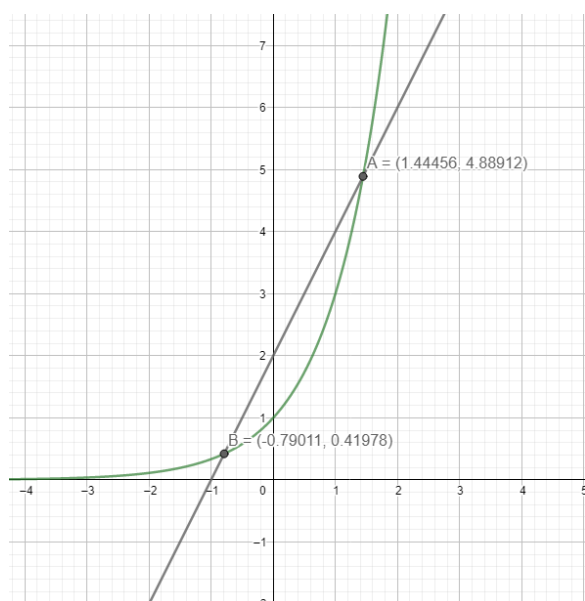
$$x_1 = -1 - \frac{W_0\left(-\frac{\ln 3}{6}\right)}{\ln 3}$$

$$x_2 = -1 - \frac{W_{-1}\left(-\frac{\ln 3}{6}\right)}{\ln 3}$$

A jak se s tím popere Wolfram Alfa?



A co takhle Geogebra, grafické řešení?



Zajímavé úlohy

Na internetu se vyskytuje spousta úloh na exponenciální rovnice, které vyžadují při řešení nějaký trik – určitý postup, který nenaleznete v běžných učebnicích.

Úloha 1

$$x^{x^{x^3}} = 3$$

Řešení

Musí rekurentně platit

$$x^3 = 3$$

tj.

$$x = \sqrt[3]{3}$$

$$K = \{\sqrt[3]{3}\}$$

Úloha 2

Tato úloha, ač se zdá jednoduchá má v reálných číslech dokonce 4 řešení.

$$x^{x+4} = \sqrt[3]{x}$$

$$x^{x+4} = x^{\frac{1}{3}}$$

Pokud x je různé od nuly lze dělit, pokud je $x = 0$ rovnost platí!!!

$$\frac{x^{x+4}}{x^{\frac{1}{3}}} = 1$$

$$x^{x+4-\frac{1}{3}} = 1$$

$$x^{x+\frac{11}{3}} = 1$$

Máme dvě možnosti, jak získat z mocniny číslo 1. Buď je exponent roven 0

$$x + \frac{11}{3} = 0$$

Tedy $x = -\frac{11}{3}$ a to je regulérní řešení, neboť třetí odmocnina je definována i pro záporná čísla.

Nebo je základ roven 1

$$x = 1$$

Ovšem POZOR, zde je možné použít jako základ i číslo -1. Lichá mocnina a odmocnina záporného čísla je určitě definována.

$$K = \left\{-\frac{11}{3}; -1; 0; 1\right\}$$

Úloha 3

A jedno nestandardní řešení

$$3^{x-2} + 5^{x-2} = 34$$

$$3^{x-2} + 5^{x-2} = 9 + 25$$

$$x = 4$$

$$K = \{4\}$$

Závěr

A obvyklá otázka. K čemu je to dobré? K čemu mi to bude?

No, pokud nepůjdete studovat dále na vysokou školu a matematika není váš koníček, tak jste si alespoň pocvičili trochu mozek a můžete po písémkách asi většinu věcí pustit z hlavy.

Jinak se s touto problematikou znovu setkáte v základním vysokoškolském kurzu matematiky a fyziky, v teorii nekonečných řad, v kurzu komplexní analýzy, dále při řešení např. diferenciálních a integrálních rovnic, při studiu systémů, v teorii katastrof a mnoha jiných oborech (např. v genetice), kde se bude automaticky předpokládat, že tuto problematiku ovládáte. A pokud ne, musíte si látku střední školy zopakovat 😊😊😊

Zdroje a odkazy

https://en.wikipedia.org/wiki/Lambert_W_function

<https://www.matweb.cz/exponencialni-rovnice/>

<https://skolaposkole.cz/matematika-ss/exponencialni-rovnice>

<https://www.priklady.com/cs/index.php/rovnice-a-nerovnice/exponencialni-rovnice-a-nerovnice>