Legendrova hypotéza

Pavel Hrubý

Hypotéza

Legendrova hypotéza - mezi čísly n^2 a $(n+1)^2$ leží aspoň jedno prvočíslo.

Úvod

Nechť n je přirozené číslo větší nebo rovné 3. Máme dokázat

$$n^2 < p_k < (n+1)^2$$

Označme $\mathrm{p_i} = \lfloor \mathrm{n}^2 \rfloor_\mathrm{p}$ (největší prvočíslo menší než n^2)

Pak

$$p_i < n^2 < p_k \leq p_{i+m} < (n+1)^2$$

Důkaz

$$p_i < n^2 < p_k \leq p_{i+m} < (n+1)^2$$

n^2 určitě leží mezi dvěma sousedními prvočísly. Tedy $p_{\mathrm{i}+1}$ je nejmenší prvočíslo větší než n^2.

$$p_i < n^2 < p_{\mathrm{i}+1}$$

Pak platí

$$\sqrt{\mathrm{p_i}} < \mathrm{n} < \sqrt{\mathrm{p_{i+1}}}$$

$$0 < n - \sqrt{\mathrm{p_i}} < \sqrt{\mathrm{p_{i+1}}} - \sqrt{\mathrm{p_i}}$$

Platí (viz důkaz Andrikovy domněnky – A.d.)

$$\sqrt{\mathrm{p_{i+1}}} - \sqrt{\mathrm{p_i}} < 1$$

a protože má platit
$$p_i < n^2 < p_{\mathrm{i}+1}$$

pak

$$0 < n - \sqrt{\mathrm{p_i}} < \sqrt{\mathrm{p_{i+1}}} - \sqrt{\mathrm{p_i}} < 1$$

Pro L (z důkazu A.d.)

$$\mathrm{L} = \frac{1 + \sqrt{8\mathrm{p_i} + 1}}{2} \approx \sqrt{2\mathrm{p_i}}$$

platí

$$\mathrm{p_i} < \mathrm{n}^2 < \mathrm{p_{i+1}} \leq \mathrm{p_i} + \mathrm{L}$$

tedy

$$\mathrm{p_i} < \mathrm{n}^2 \leq \mathrm{p_i} + \mathrm{L}$$

$p_i < n^2 \leq p_i + \sqrt{2p_i}$

$p_i < n^2 \leq p_i + \sqrt{2p_i}$

$p_i < n^2 \leq p_i \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{p_i}}\right)$

pro největší prvočíslo menší než n^2

$p_i = \lfloor n^2 \rfloor_p$

Takové prvočíslo vždy existuje, navíc máme zaručeno, že v intervalu $(p_i, p_i + L\rangle$ existuje alespoň jedno prvočíslo a poněvadž nemůže být menší než n^2, musí být větší, navíc pro toto prvočíslo p_j platí nerovnost $p_i < n^2 < p_{i+1} \leq p_j \leq p_i + L$

Dále platí

$p_i + L < (n+1)^2$

$p_i + \sqrt{2p_i} < (n+1)^2$

$p_i \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{p_i}}\right) < (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 < p_i \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{p_i}}\right) + 2n + 1$

$0 < 2n + 1$

Tedy máme

$p_i < n^2 < p_{i+1} \leq p_j \leq p_i + L < (n+1)^2$

Tedy existuje p_j takové, že

$n^2 < p_j < (n+1)^2$

◁