Kubické rovnice s celočíselným řešením

Pavel Hrubý

Obsah

Úvod do kubických rovnic

Řešení rovnic patří k základům středoškolské matematiky. Na základní škole jste se naučili, jak řešit lineární a kvadratické rovnice, na střední škole se řeší rovnice vyšších stupňů, reciproké rovnice, iracionální rovnice, rovnice goniometrické, a i rovnice binomické. Kubickým rovnicím není věnována žádná zvýšená pozornost a lze říct, že výklad tohoto typu rovnic je shrnut do maximálně dvaceti minut. Řešení kubických rovnic je také nedílnou součástí při zkoumání grafu kubické funkce. Tento článek snad pomůže těm studentům, kteří se více zajímají o tuto problematiku.

Kubická rovnice

Kubická rovnice je algebraická rovnice třetího stupně, jejíž obecný tvar je:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

kde a, b, c a d jsou reálná čísla, a ≠ 0.

Normovaná celočíselná rovnice pak má tvar

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0$$

Podle základní věty algebry platí

$$x^3 + px^2 + qx + r = (x - k_1)(x - k_2)(x - k_3)$$

kde k_i jsou kořeny normované kubické rovnice a jsou stejné, jako u původní nenormované rovnice.

Existují dva základní postupy pro řešení kubických rovnic. Harriotův a Cardanův. Oba algoritmy vedou ke stejným vzorcům. Nebudu je zde uvádět, viz Wikipedie.

Stejně tak pro řešení konkrétní kubické rovnice lze využít řadu online prostředků a matematických programů např. WolframAlfa, MathWorld, Geogebra atd.

Možnosti počtu řešení plyne již z výše uvedeného rozkladu na kořenový součin. Pro počet řešení máme tedy tyto možnosti:

Tři různé reálné kořeny	$(x - k_1)(x - k_2)(x - k_3)$
Jeden dvojnásobný reálný kořen a další reálný kořen	$(x - k_1)(x - k_2)^2$
Jeden reálný kořen a dva komplexně sdružené kořeny	$(x - k_1)(x - z)(x - \bar{z})$
Jeden trojnásobný reálný kořen	$(x - k_1)^3$

Poněvadž normovanou kubickou rovnici lze transformací $x = t - \frac{p}{3}$ převést na redukovanou kubickou rovnici (rovnice bez kvadratického členu) $t^3 + At + B = 0$, lze pro diskusi o počtu řešení použít analytickou geometrii, tedy určování počtu společných bodů křivky třetí mocniny a přímky. Tady nám pomůže zobrazením grafů funkcí $f: y = x^3$ a $g: y = ax + b$. Ideálním programem pro tato znázornění je Geogebra.

Diskriminant kubické rovnice je definován jako $D_3 = a^4(k_1 - k_2)^2(k_1 - k_3)^2(k_2 - k_3)^2$ což pomocí Viétových vzorců lze přepsat na $D_3 = 18abcd - 4b^3d + b^2c^2 - 4ac^3 - 27a^2d^2$

Pro normovaný tvar $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ máme

$$D_n = (k_1 - k_2)^2(k_1 - k_3)^2(k_2 - k_3)^2 = 18pqr - 4p^3r + p^2q^2 - 4q^3 - 27r^2$$

a máme-li normovaný redukovaný tvar ($p = 0$), pak

$$D_n = -4q^3 - 27r^2 = -108\left(\frac{q^3}{27} + \frac{r^2}{4}\right) = -108\left[\left(\frac{q}{3}\right)^3 + \left(\frac{r}{2}\right)^2\right]$$

S reálnými koeficienty platí:

- Rovnice má tři různé reálné kořeny pro $D > 0$.
- Rovnice má násobný kořen (dvojný nebo trojný) ze tří reálných čísel pro $D = 0$.
- Rovnice má jeden reálný a dva imaginární sdružené kořeny pro $D < 0$.

Rovnice bez kvadratického členu

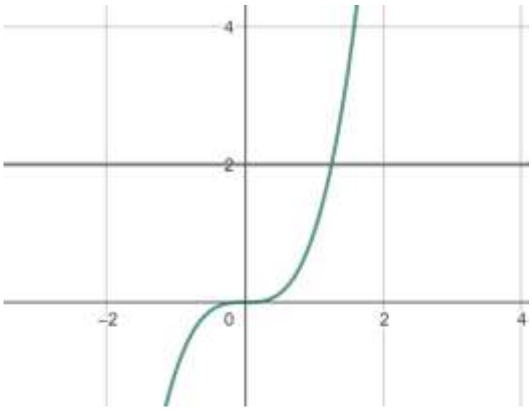
Podívejme se tedy na možnosti řešení rovnic bez kvadratického členu $x^3 + Ax + B = 0$.

Tento tvar rovnic se nazývá redukovaný.

Vezměme tedy grafy funkcí f a g a podívejme se na jejich vzájemnou polohu.

Grafem funkce g je přímka, která protíná osu y v bodě $[0, b]$ a má směrnici a.

Jeden reálný kořen



Přímka $g: y = ax + b$ je vodorovná s osou x, směrnice $a = 0,\ b \neq 0$. Pro jeden průsečík s grafem funkce $f: y = x^3$ máme binomickou rovnici $x^3 = b$, ta má jedno reálné řešení (a dvě komplexně sdružená řešení).

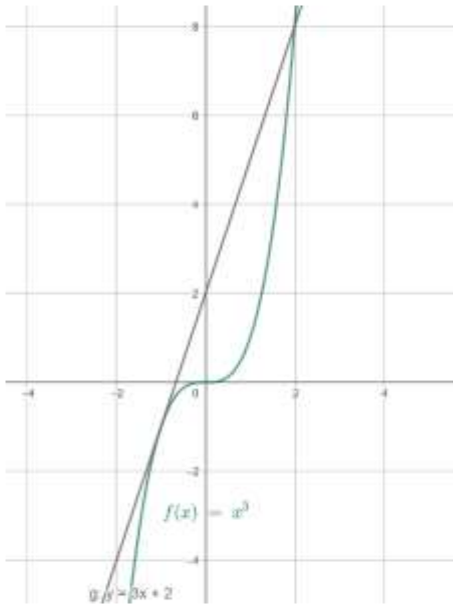
$x^3 - ax - b = 0$ a $a = 0$

$$D_n = -108\left[\left(\frac{-a}{3}\right)^3 + \left(\frac{-b}{2}\right)^2\right] = -108\left(\frac{-b}{2}\right)^2 < 0$$

Diskriminant je záporný.

Dvojnásobný reálný kořen

Přímka *g* o nenulové směrnici se dotýká grafu funkce *f* v jednom bodě, pokud je směrnice této přímky v intervalu $a \in (-\infty, s)$ kde s je směrnice tečny ke grafu f v nějakém bodě z, směrnici určíme jako první derivaci funkce $f: y = x^3$ v bodě z, tedy



$$s = (x^3)'_z = 3z^2$$

Pak z je také x-ová souřadnice bodu dotyku tečny (přímky g) a grafu f.

Takže platí

$$z^3 = s \cdot z + b = 3z^2 \cdot z + b$$

$$b = -2z^3$$

Tedy dotykový bod má x-ovou souřadnici

$$z = \sqrt[3]{-\frac{b}{2}}$$

a směrnice přímky *g* je

$$s = 3z^2 = 3\sqrt[3]{\left(\frac{b}{2}\right)^2}$$

Pokud je přímka g tečnou ke grafu f, máme případ jednoho dvojnásobného kořene a jednoho jednoduchého kořene. Pak má přímka *g* analytické vyjádření

$$g: y = 3\sqrt[3]{\left(\frac{b}{2}\right)^2}\, x + b$$

a máme obecně kubickou rovnici

$$x^3 = 3\sqrt[3]{\left(\frac{b}{2}\right)^2}\, x + b$$

neboli

$$x^3 - 3\sqrt[3]{\left(\frac{b}{2}\right)^2}\, x - b = 0$$

která má dvojnásobný kořen $z = \sqrt[3]{-\frac{b}{2}}$ a jednoduchý kořen k.

Kořen k získáme pomocí Vietova vzorce pro absolutní člen, který je roven součinu kořenů:

$$b = \sqrt[3]{-\frac{b}{2}} \cdot \sqrt[3]{-\frac{b}{2}} \cdot k$$

$$k = \frac{b}{\sqrt[3]{\left(\frac{b}{2}\right)^2}}$$

Rozklad na součin je pak

$$x^3 - 3\sqrt[3]{\left(\frac{b}{2}\right)^2}\,x - b = \left(x - \sqrt[3]{-\frac{b}{2}}\right)^2 \left(x - \frac{b}{\sqrt[3]{\left(\frac{b}{2}\right)^2}}\right)$$

Pro diskriminant máme

$$D_{3n} = -108\left[\left(\frac{-a}{3}\right)^3 + \left(\frac{-b}{2}\right)^2\right] = -108\left[\left(\frac{-3\sqrt[3]{\left(\frac{b}{2}\right)^2}}{3}\right)^3 + \left(\frac{-b}{2}\right)^2\right]$$

$$= -108\left[-\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{-b}{2}\right)^2\right] = 0$$

a diskriminant je roven 0.

Ilustrace

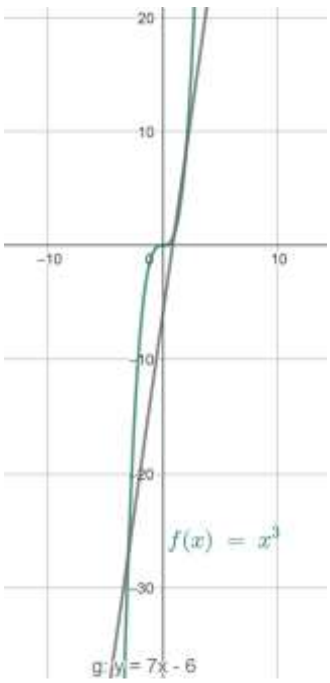
$x^3 = 3x + 2$

$$x^3 - 3x - 2 = \left(x - \sqrt[3]{-\frac{2}{2}}\right)^2 \left(x - \frac{2}{\sqrt[3]{\left(\frac{2}{2}\right)^2}}\right) = (x+1)^2(x-2)$$

Kořeny: dvojnásobný $x_1 = -1$ a jednoduchý $x_2 = 2$

Tři různé reálné kořeny

Tři různé reálné kořeny má rovnice tehdy, pokud přímka g protíná graf f ve třech bodech. To nastane v případě, že směrnice přímky g je v intervalu $a \in (s, +\infty)$.



$s = 3\sqrt[3]{\left(\frac{b}{2}\right)^2}$

$g: y = ax + b$

$x^3 = ax + b$

Pro tento tvar rovnice máme diskriminant

Z nerovnosti $a > 3\sqrt[3]{\left(\frac{b}{2}\right)^2}$ plyne $\left(\frac{a}{3}\right)^3 > \left(\frac{b}{2}\right)^2$

$$D_{3n} = -108\left[\left(\frac{-a}{3}\right)^3 + \left(\frac{-b}{2}\right)^2\right] = 108\left[\left(\frac{a}{3}\right)^3 - \left(\frac{b}{2}\right)^2\right] > 0$$

Pro $D > 0$ má rovnice tři reálné kořeny.

Ilustrace

(Poznámka: zde jsou kořeny zvoleny tak, že jejich součet je 0, pak je kvadratický člen nulový)

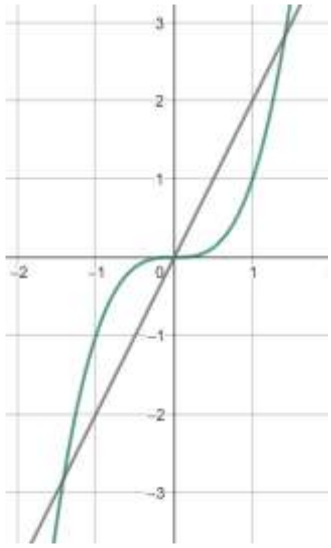
$(x+1)(x+2)(x-3) = (x^2+3x+2)(x-3) = x^3 - 7x - 6$

$x^3 = 7x + 6$

$D_{kn} = 108\left[\left(\frac{a}{3}\right)^3 - \left(\frac{b}{2}\right)^2\right] = \frac{4a^3-27b^2}{108} = \frac{27\cdot 7-27\cdot 6}{108} = \frac{27}{108} > 0$

Hodnota $s = 3\sqrt[3]{\left(\frac{7}{2}\right)^2} = 6{,}9156\ldots$

V případě, že přímka prochází počátkem, je absolutní člen *b* nulový a máme rovnici



$x^3 = ax$

Pak máme evidentně vždy tři řešení, pokud je koeficient *a* kladný, pak jsou řešení v reálných číslech.

$x_1 = 0, x_{2,3} = \pm\sqrt{a}.$

V případě záporné směrnice *a* máme jedno reálné a dvě komplexně sdružená řešení.

$x_1 = 0, x_{2,3} = \pm i\sqrt{|a|}.$

Diskriminant rovnice se pak zredukuje na

$D_{kn} = \frac{a^3}{27} > 0$ pro kladné a.

Kubická rovnice a graf kubické funkce

Podívejme se nyní na grafy kubické funkce.

Kubická rovnice v obecném tvaru je

$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

(zde jsou a,b,c,d reálná čísla)

po vydělení koeficientem *a* máme normovanou kubickou rovnici

$x^3 + px^2 + qx + r = 0$

Pokud budeme uvažovat funkci

$f: y = x^3 + px^2 + qx + r$

pak jednotlivá řešení kubické rovnice v reálných číslech odpovídají průsečíkům grafu funkce s osou x.

Počet řešení lze určit na základě diskriminantu kubické rovnice

$D = 18abcd - 4b^3d + b^2c^2 - 4ac^3 - 27a^2d^2$

a pro normovaný tvar

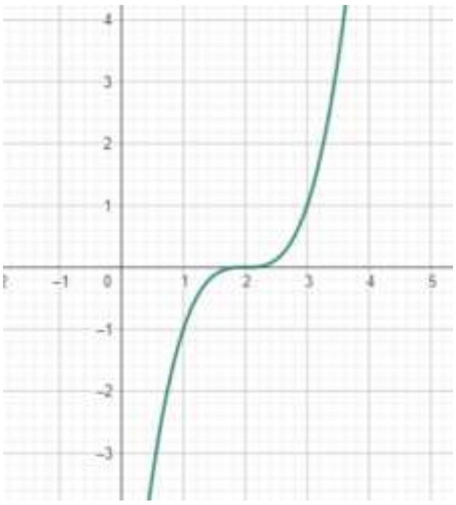
$D_n = 18pqr - 4p^3r + p^2q^2 - 4q^3 - 27r^2$

a pro normovaný tvar bez kvadratického členu ($p = 0$)

$D_{kn} = -4q^3 - 27r^2$

Podívejme se na jednotlivé možnosti.

Jeden trojnásobný reálný kořen



$x^3 + px^2 + qx + r = (x - k)^3 = x^3 - 3kx^2 + 3k^2x - k^3$

Ověřme si diskriminant kubické rovnice:

$D = 18pqr - 4p^3r + p^2q^2 - 4q^3 - 27r^2 = 18 \cdot 9k^6 - 4 \cdot 27k^6 + 81k^6 - 4 \cdot 27k^6 - 27k^6 = 0k^6 = 0$

Pro *D* = *0* má rovnice buď jeden trojnásobný reálný kořen nebo jeden dvojnásobný a jeden jednoduchý reálný kořen.

Příklad: $(x - 2)^3 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$

Graf fce $y = x^3$ je zde posunutý ve směru osy x.

Rychlá analýza (odhad, zda zadaná rovnice je tohoto typu)

Rovnice má všechny členy, absolutní člen je třetí mocninou, koeficienty kvadratického a lineárního členu jsou dělitelné 3, koeficient u lineárního členu je kladné číslo. (Pak můžeme zkusit umocnit $\left(x - \sqrt[3]{r}\right)^3$ a porovnat výsledek se zadáním.)

Funkce nemá lokální extrémy a má jeden inflexní bod, který leží na ose x a je současně řešením rovnice.

Po derivaci funkce f tedy dostaneme

$f: y = (x - k)^3 = x^3 - 3kx^2 + 3k^2x - k^3$

$\dot{f}: y = 3(x - k)^2$

$(x - k)^2 = 0$

$x_e = k$

Platí

$f(k) = 0$

$\dot{f}(k) = 0$

$\ddot{f}(k) = 0$

Tedy x_e je opravdu inflexní bod.

Dva reálné kořeny, jeden z nich je násobný

$$x^3 + px^2 + qx + r = (x - k_1)(x - k_2)^2 = (x - k_1)(x^2 - 2k_2x + k_2^2)$$
$$= x^3 - (k_1 + 2k_2)x^2 + (2k_1k_2 + k_2^2)x - k_1k_2^2$$
$$= x^3 - (k_1 + 2k_2)x^2 + (2k_1 + k_2)k_2x - k_1k_2^2$$

Příklad: $(x - 2)(x - 3)^2 = x^3 - 8x^2 + 21x - 18$

Rychlá analýza (odhad, zda zadaná rovnice je tohoto typu)

Absolutní člen je dělitelný druhou mocninou čísla a toto číslo dělí koeficient u lineárního členu.

Rozklad na součin

$$x^3 + px^2 + qx + r = (x - k_1)(x - k_2)^2 = (x - k_1)(x^2 - 2k_2x + k_2^2)$$

kde $p = -(k_1 + 2k_2)$, $q = 2k_1k_2 + k_2^2, r = -k_1k_2^2$

a diskriminant

$$D = 18pqr - 4p^3r + p^2q^2 - 4q^3 - 27r^2$$
$$= 18(k_1 + 2k_2)(2k_1k_2 + k_2^2)k_1k_2^2 - 4(k_1 + 2k_2)^3k_1k_2^2$$
$$+ (k_1 + 2k_2)^2(2k_1k_2 + k_2^2)^2 - (2k_1k_2 + k_2^2)^2 - 27k_1^2k_2^4 = \cdots = 0$$

což odmítám počítat. Nulovost diskriminantu plyne přímo z jeho definice.

Ilustrace

$(x + 2)(x - 2)^2 = (x + 2)(x^2 - 4x + 4) = x^3 - 2x^2 - 4x + 8$

Tedy jeden z extrémů je současně dvojnásobným kořenem.

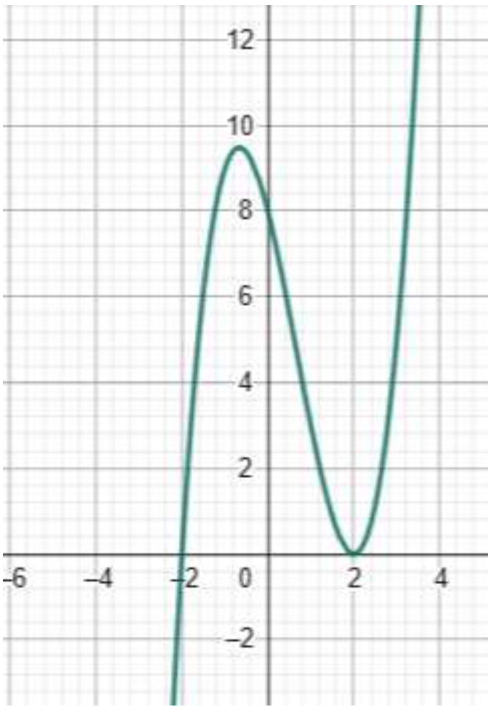
Derivujeme a položíme rovno nule.

$3x^2 + 2px + q = 0$

$x_{1,2} = \frac{-2p \pm \sqrt{4p^2 - 12q}}{6} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 3q}}{3}$

Zde konkrétně

$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 3 \cdot 4}}{3} = \frac{2 \pm 4}{3} = -\frac{2}{3}, 2$

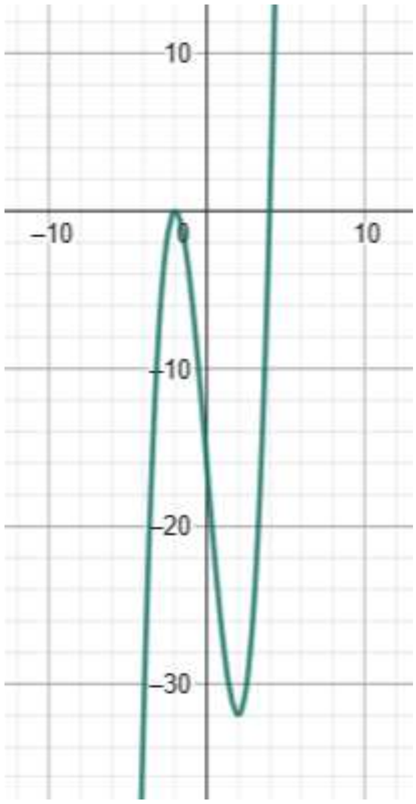


Speciální případy:

Rovnice nemá kvadratický člen

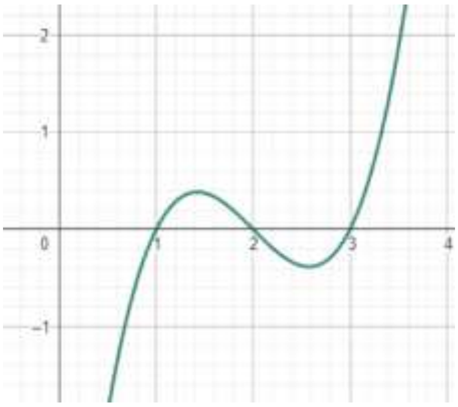
$k_1 + 2k_2 = 0$

$(x-4)(x+2)^2 = x^3 - 12x - 16$



Tři různé reálné kořeny

$$x^3 + px^2 + qx + r = (x-k_1)(x-k_2)(x-k_3)$$
$$= x^3 - (k_1+k_2+k_3)x^2$$
$$+ (k_1k_2 + k_1k_3 + k_2k_3)x - k_1k_2k_3$$



Derivaci položíme rovnu nule

$$3x^2 + 2px + q = 0$$
$$x_{1,2} = \frac{-2p \pm \sqrt{4p^2 - 12q}}{6} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 3q}}{3}$$

a extrémy jsou nenulové a musí mít opačná znaménka.

$$sgn\big(f(x_1)\big) = -sgn\big(f(x_2)\big)$$

Jeden z kořenů leží mezi extrémy tj. $x_1 < k_1 < x_2$

Příklad: $(x-1)(x-2)(x-3) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$

Pro $f: y = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ máme extrémy v bodech

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36-33}}{3} = \frac{6 \pm \sqrt{3}}{3} = 2 \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 1{,}44\ldots, 2{,}57\ldots$$

Rychlá analýza (odhad, zda zadaná rovnice je tohoto typu)

Absolutní člen má tři různé dělitele a jejich součet dá koeficient u kvadratického členu (s opačným znaménkem).

Speciální případy:

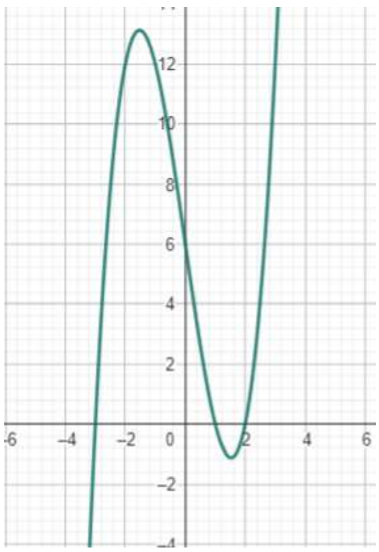
Rovnice nemá kvadratický člen

$k_1 + k_2 + k_3 = 0$

$(x-1)(x-2)(x+3) = x^3 - 7x + 6 = 0$

a extrémy

$x_{1,2} = \frac{\pm\sqrt{-q}}{3} = \frac{\pm\sqrt{7}}{3}$

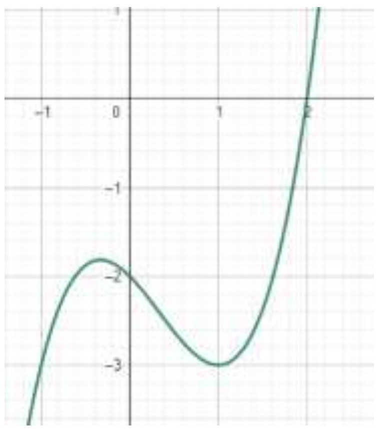


Jeden reálný kořen (druhé dva jsou komplexně sdružené kořeny)

$x^3 + px^2 + qx + r = (x-k)(x^2 + ux + v) = x^3 + (u-k)x^2 + (v-ku)x - kv$

a platí $u^2 - 4v < 0$

$(x-2)(x^2+x+1) = x^3 - x^2 - x - 2$



Pro extrémy funkce opět platí

$x_{1,2} = \frac{-p\pm\sqrt{p^2-3q}}{3}$

a extrémy jsou nenulové a jejich hodnoty musí mít stejná znaménka.

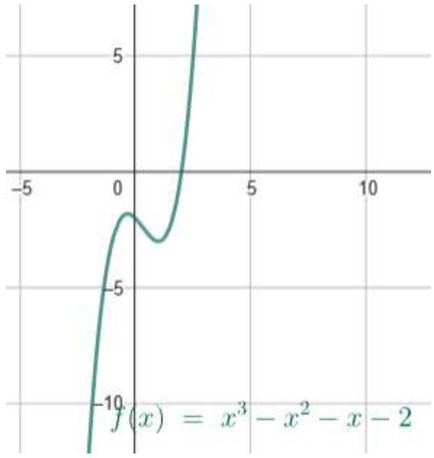
$sgn(f(x_1)) = sgn(f(x_2))$

Pro reálný kořen musí platit

$|k| > max(|x_1|, |x_2|)$

Ilustrace

Konkrétně pro $y = x^3 - x^2 - x - 2$



$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+3}}{3} = \frac{1 \pm 2}{3} = -\frac{1}{3}, 1$

$f\left(-\frac{1}{3}\right) = -1{,}815 \ldots$

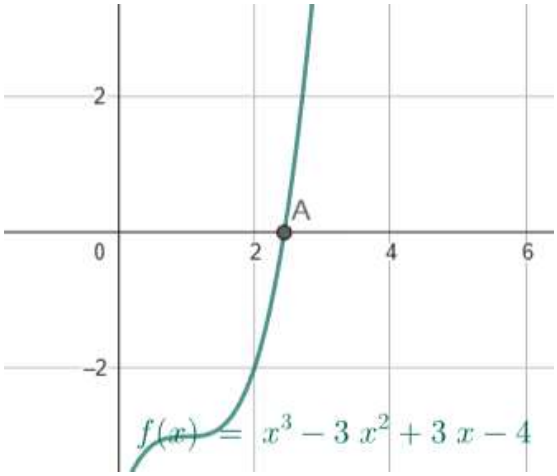
$f(1) = -3$

$|2| > max\left(\left|-\frac{1}{3}\right|, |1|\right) = 1$

Pokud je $p^2 - 3q = 0$ nemá funkce extrém a má jeden inflexní bod $x = -\frac{p}{3}$.

Ilustrace

Konkrétně pro $f: y = x^3 - 3x^2 + 3x - 4$



$x_1 = \frac{3 \pm \sqrt{9-9}}{3} = \frac{3}{3} = 1$

$f(1) = -3$

Generování kubických rovnic s celočíselným řešením

Pro demonstrační příklady se obvykle volí tvar rovnic s celočíselnými koeficienty a s celočíselným řešením kořenů. Pro demonstrace a základní procvičování řešení kubických rovnic, extrémů kubických funkcí a konstrukce grafů kubických polynomů je výhodné mít i celočíselné hodnoty extrémů.

Generování úloh s celočíselnými koeficienty a celočíselnými kořeny je celkem jednoduché.

Pro vygenerování rovnice $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ zvolíme celá čísla a, b, c, d, k_i a pronásobíme

$$a(x - k_1)(x - k_2)(x - k_3) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Pro požadovanou celočíselnost stačí provádět demonstrace na normalizovaném výrazu.

Pro normalizovaný tvar kubické rovnice zvolíme značení pro celá čísla p, q, r.

$$x^3 + px^2 + qx + r = (x - k_1)(x - k_2)(x - k_3)$$

Pokud tedy požadujeme i celočíselné hodnoty extrémů, pak

$$x_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 3q}}{3}$$

musí být celé číslo. Takže $p^2 - 3q$ musí být druhá mocnina celého čísla a výraz v čitateli musí být dělitelný 3.

Příklady s trojnásobným reálným kořenem se nehodí na procvičování extrémů, ale jsou vhodné pro demonstraci inflexního bodu.

Příklad: funkce $f: y = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x - 1)(x - 1)(x - 1)$ má jen jeden inflexní bod, který je současně i řešením kubické rovnice $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$.

Podmínky celočíselného řešení

Nechť výraz $3x^2 + 2px + q$ je derivací výrazu $x^3 + px^2 + qx + r$.

Nechť máme celočíselné extrémy v bodech x_1 a x_2, které splňují rovnici

$$3x^2 + 2px + q = 3(x - x_1)(x - x_2) = 0$$
$$2p = -3(x_1 + x_2)$$
$$q = 3x_1x_2$$

Rozklad kubického čtyřčlenu na součin nám dává

$$x^3 + px^2 + qx + r = (x - k_1)(x - k_2)(x - k_3)$$

$$p = -(k_1 + k_2 + k_3)$$

$$q = k_1k_2 + k_1k_3 + k_2k_3$$

$$r = -k_1k_2k_3$$

Porovnáním dostaneme soustavu diofantických rovnic

$3(x_1 + x_2) = 2(k_1 + k_2 + k_3)$

$3x_1 x_2 = k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3$

$k_1 \leq x_1 < k_2 \leq x_2 \leq k_3$

Generování úloh s dvojnásobným celočíselným kořenem

Speciální a také nejjednodušší případ je pro dvojnásobný kořen kde se křivka grafu musí dotýkat osy x a současně má v dotykovém bodu extrém.

Zde si jako parametry zvolíme extrém x_1 a jeden kořen k_1.

Pro $k_2 = k_3 = x_2$

$3(x_1 + x_2) = 2(k_1 + 2k_2)$

$3x_1 x_2 = 2k_1 k_2 + k_2 k_2$

$3(x_1 + k_2) = 2(k_1 + 2k_2)$

$3x_1 k_2 = 2k_1 k_2 + k_2 k_2$

z toho pro $k_2 \neq 0$

$3x_1 = 2k_1 + k_2$

$x_1 = \frac{2k_1 + k_2}{3}$

Zvolme tedy kořen k_1 a extrém x_1 , pak $k_2 = k_3 = x_2 = 3x_1 - 2k_1$

Spočteme koeficienty p, q, r v rovnici $x^3 + px^2 + qx + r = 0$.

$p = -(k_1 + 2k_2)$

$q = 2k_1 k_2 + k_2^2$

$r = -k_1 k_2^2$

Rovnice pak má tvar

$x^3 + px^2 + qx + r = x^3 - (k_1 + 2k_2)x^2 + (2k_1 k_2 + k_2^2)x - k_1 k_2^2 = 0$

Ilustrace

Zvolme $k_1 = -2$ a $x_1 = -1$, pak $k_2 = x_2 = 3(-1) - 2(-2) = 1$

vypočteme

$p = -(k_1 + 2k_2) = -(-2 + 2 \cdot 1) = 0$

$q = 2k_1k_2 + k_2k_2 = -4 + 1 = -3$

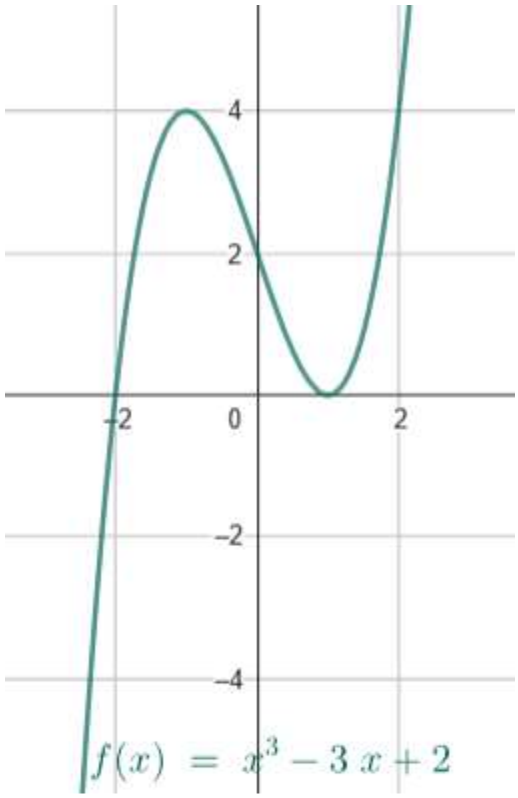
$r = -k_1k_2k_2 = 2$

Dostaneme rovnici

$x^3 - 3x + 2 = 0$

Graf příslušné funkce

$y = x^3 - 3x + 2$



Generování úloh s jedním celočíselným kořenem

Pokud má rovnice jeden reálný kořen, má druhé dva kořeny komplexní a komplexně sdružené.

$x^3 + px^2 + qx + r = (x - k_1)(x - z)(x - \bar{z})$

$x^3 + px^2 + qx + r = (x - k_1)(x^2 + ux + v)$

$u = -(z + \bar{z})$

$v = z\bar{z}$

$p = -(k_1 + z + \bar{z}) = -(k_1 - u) = u - k_1$

$q = k_1(z + \bar{z}) + z\bar{z} = -k_1u + v$

$r = k_1z\bar{z} = -k_1v$

Funkci na levé straně derivujeme

$[x^3 + px^2 + qx + r]' = [(x - k_1)(x^2 + ux + v)]' = (x^2 + ux + v) + (x - k_1)(2x + u) = 3x^2 + 2(u - k_1)x + (v - k_1u) = 3x^2 + 2px + q = 3(x - x_1)(x - x_2) = 3x^2 - 3(x_1 + x_2) + 3x_1x_2$

k_1 je kořen a x_1 a x_2 jsou body extrémů a platí

$k_1 < x_1 \leq x_2$

a porovnáme výrazy

$2p = 2(u - k_1) = -3(x_1 + x_2)$

$q = 3x_1x_2$

a poněvadž k_1 je kořen

$r = -(k_1^3 + pk_1^2 + qk_1)$

Pro generování normalizované rovnice s celočíselnými koeficienty s celočíselným kořenem a celočíselnými extrémy zvolíme jako výchozí parametry celočíselné hodnoty pro kořen k_1 a body extrémů x_1 a x_2 tak, že jejich součet je sudý, pak platí

$p = -3\frac{x_1+x_2}{2}$

$q = 3x_1x_2$

$r = -(k_1^3 + pk_1^2 + qk_1)$

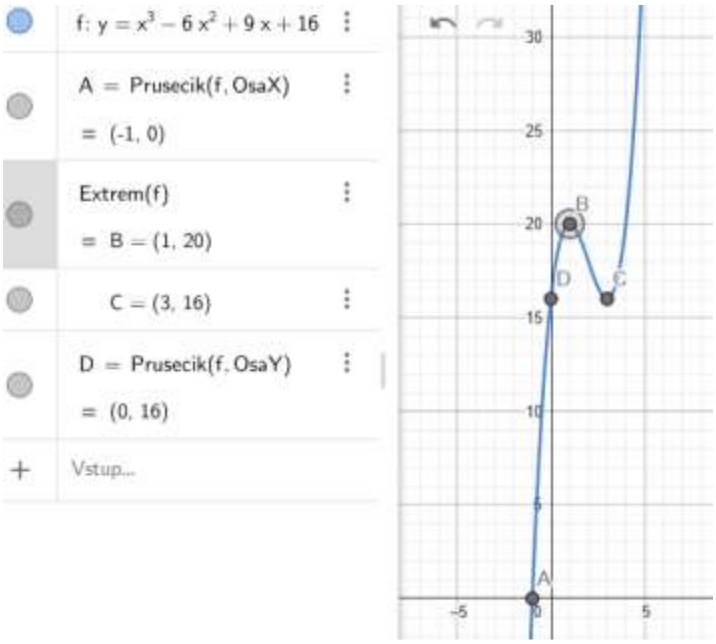
$x^3 + px^2 + qx + r = (x - k_1)(x^2 + ux + v)$

kde

$u = p + k_1$

$v = q + k_1u$

Ilustrace



$k_1 = -1$

$x_1 = 1$

$x_2 = 3$

$p = -3\frac{x_1+x_2}{2} = -3 \cdot 1 = -6$

$q = 3x_1x_2 = 3 \cdot 3 = 9$

$r = -(k_1^3 + pk_1^2 + qk_1) = -[-1 + (-6) \cdot (-1)^2 + 9 \cdot (-1)] = 16$

$f: y = x^3 - 6x^2 + 9x + 16$

Možnost s inflexním bodem

Zde dostáváme posunutý graf funkce $y = x^3$ tak, že graf funkce protíná osu x v celočíselném bodě k1.

Tedy platí pro inflexní bod

$x_1 = x_2$

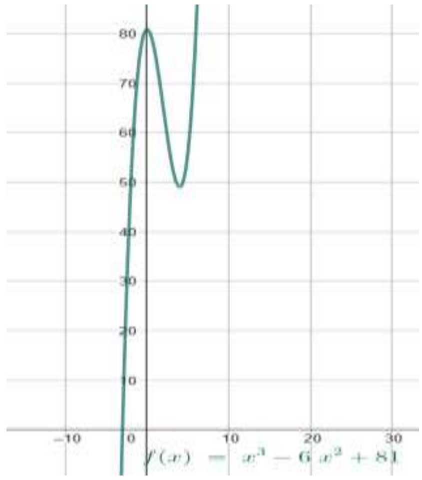
$p = -3x_1$

$q = 3x_1^2$

$r = -k_1^3 - pk_1^2 - qk_1$

viz. ilustrace 3

Ilustrace 1



$x_1 = 2$ a $x_2 = 4$ a $k_1 = -1$

$$p = -3\,\frac{2+4}{2} = -9$$

$$q = 3 \cdot 2 \cdot 4 = 24$$

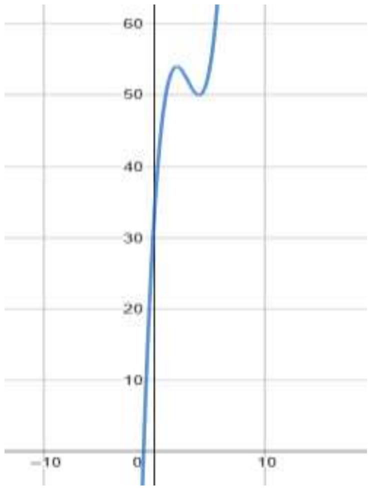
$$r = -k_1^3 - pk_1^2 - qk_1 = 1 + 9 + 24 = 34$$

$$u = p + k_1 = -9 - 1 = -10$$

$$v = k_1u + 3x_1x_2 = -1 \cdot (-10) + 3 \cdot 2 \cdot 4 = 34$$

$$x^3 - 9x^2 + 24x + 34 = (x+1)(x^2 - 10x + 34)$$

Ilustrace 2



$x_1 = 0$ a $x_2 = 4$ a $k_1 = -3$

$$p = -3\,\frac{4}{2} = -6$$

$$q = 3 \cdot 0 \cdot 4 = 0$$

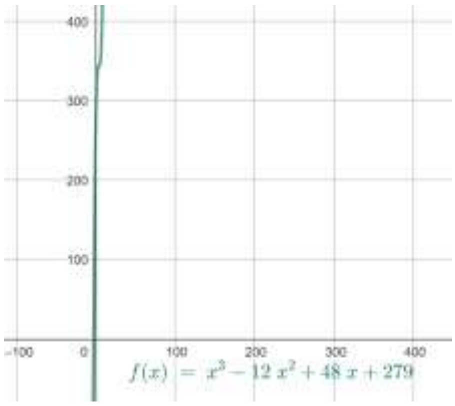
$$r = -k_1^3 - pk_1^2 - qk_1 = 27 + 54 + 0 = 81$$

$$u = p + k_1 = -6 - 3 = -9$$

$$v = k_1u + 3x_1x_2 = -3 \cdot (-9) + 3 \cdot 0 \cdot 4 = 27$$

$$x^3 - 6x^2 + 81 = (x+3)(x^2 - 9x + 27)$$

Ilustrace 3



$x_1 = 4$ a $x_2 = 4$ a $k_1 = -3$

$$p = -3 \cdot 4 = -12$$

$$q = 3 \cdot 4^2 = 48$$

$$r = -(k_1^3 + pk_1^2 + qk_1) = 27 + 108 + 144 = 279$$

$$u = p + k_1 = -12 - 3 = -15$$

$$v = k_1u + 3x_1x_2 = -3 \cdot (-15) + 3 \cdot 4 \cdot 4 = 93$$

$$x^3 - 12x^2 + 48x + 279 = (x+3)(x^2 - 15x + 93)$$

Tři celočíselné reálné kořeny a celočíselné extrémy

$x^3 + px^2 + qx + r = (x - k_1)(x - k_2)(x - k_3) = 0$

$f: y = x^3 + px^2 + qx + r$

Pro extrémy

$f': y = 3x^2 + 2px + q = 3(x - x_1)(x - x_2) = 0$
$2p = -3(x_1 + x_2)$
$q = 3x_1x_2$

Rozklad na součin nám dává

$x^3 + px^2 + qx + r = (x - k_1)(x - k_2)(x - k_3)$

$p = -(k_1 + k_2 + k_3)$

$q = k_1k_2 + k_1k_3 + k_2k_3$

$r = -k_1k_2k_3$

Soustava diofantických rovnic

$3(x_1 + x_2) = 2(k_1 + k_2 + k_3)$

$3x_1x_2 = k_1k_2 + k_1k_3 + k_2k_3$

$k_1 < x_1 < k_2 < x_2 < k_3$

Zjednodušíme řešení problému, pokud zvolíme za jeden kořen 0.

$k_2 = 0$

Pak pro extrémy bude platit vztah

$3x_1^2 + 2px_1 + q = 0$

$3x_1^2 - 2(k_1 + k_3)x_1 + k_1k_3 = 0$

$x_{1.2} == \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 3q}}{3} = \frac{2(k_1 + k_3) \pm \sqrt{D}}{6} = \frac{(k_1 + k_3) \pm \sqrt{k_1^2 - k_1k_3 + k_3^2}}{3}$

$D' = 4p^2 - 12q = 4(p^2 - 3q) = 4(k_1 + k_3)^2 - 12k_1k_3 = 4k_1^2 + 4k_3^2 - 4k_1k_3 = 4(k_1^2 - k_1k_3 + k_3^2)$

Podmínka pro celočíselnost x – diskriminant musí být druhou mocninou celého čísla

$p^2 - 3q = k_1^2 - k_1k_3 + k_3^2 = (k_1 - k_3)^2 + k_1k_3 = D^2$

Pro zvolené kořeny tedy máme diofantickou rovnici

$k_1^2 - k_1k_3 + k_3^2 = D^2$

Řešit tuto rovnici lze např. přes Einsensteinova čísla.

$k_1 = m^2 - n^2$

$k_3 = 2mn - n^2$

$\sqrt{D} = m^2 - mn + n^2$

Ověření

$$D = \|k_1 + k_3\omega\| = k_1^2 - k_1k_3 + k_3^2 = (m^2 - n^2)^2 - (m^2 - n^2)(2mn - n^2) + (2mn - n^2)^2$$
$$= m^4 - 2m^2n^2 + n^4 - 2m^3n + 2mn^3 + m^2n^2 - n^4 + 4m^2n^2 - 4mn^3 + n^4$$
$$= m^4 + 3m^2n^2 + n^4 - 2m^3n - 2mn^3$$

$$D = (m^2 - mn + n^2)^2 = (m^2 - mn)^2 + 2(m^2 - mn)n^2 + n^4$$
$$= m^4 - 2m^3n + 3m^2n^2 - 2mn^3 + n^4$$

Požadujeme celočíselné extrémy, musíme tedy přidat ještě další podmínku.

$k_1 + k_3 = m^2 - 2n^2 + 2mn$

$\sqrt{D} = m^2 - mn + n^2$

$x_1 = \frac{2(k_1+k_3)\pm\sqrt{D}}{6} = \frac{m^2-2n^2+2mn\pm(m^2-mn+n^2)}{3}$

$x_1 = \frac{2m^2-n^2+mn}{3} = \frac{(2m-n)(m+n)}{3}$

$x_2 = \frac{-3n^2+3mn}{3} = mn - n^2$

Stačí tedy požadovat, aby součet čísel m a n byl dělitelný 3.

Pozn. Součet $m + n$ dělitelný 3 právě když je rozdíl $2m - n$ dělitelný 3.

Diskuse parametrů m, n

Pro parametry m=n dostaneme dvojnásobný reálný kořen 0 (s jedním extrémem v 0)

$k_1 = m^2 - n^2 = 0$

$k_3 = 2mn - n^2 = n^2$

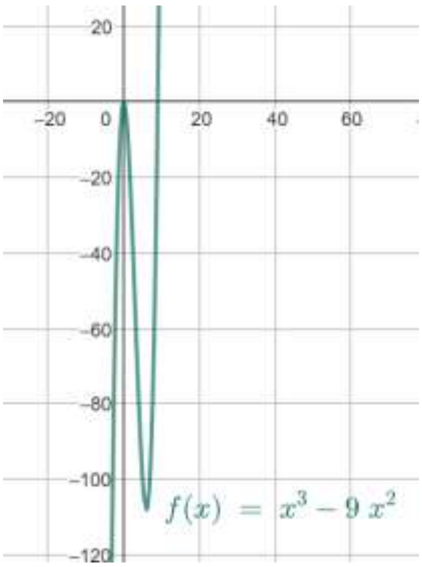
$\sqrt{D} = m^2 - mn + n^2 = n^2$

$x_1 = \frac{(2m-n)(m+n)}{3} = \frac{3n}{3} = n$

$x_2 = mn - n^2 = 0$

Příklad

$\boldsymbol{x^3 - 9x^2 = 0}$



Pro parametry $m = 2n$ dostaneme dvojnásobný kořen neboť

$k_1 = m^2 - n^2 = 4n^2 - n^2 = 3n^2$

$k_3 = 2mn - n^2 = 2 \cdot 2n \cdot n - n^2 = 3n^2$

$\sqrt{D} = 4n^2 - 2n \cdot n + n^2 = 3n^2$

$x_1 = \frac{(2m-n)(m+n)}{3} = \frac{3n \cdot 3n}{3} = 3n^2$

$x_2 = mn - n^2 = 2n \cdot n - n^2 = n^2$

Pokud m a n jsou soudělná čísla se společným dělitelem r, pak

$m = rs$

$n = rt$

$k_1 = m^2 - n^2 = r^2(s^2 - t^2)$

$k_3 = 2mn - n^2 = r^2(2st - t^2)$

$\sqrt{D} = m^2 - mn + n^2 = r^2(s^2 - st + t^2)$

$x_1 = \frac{(2m-n)(m+n)}{3} = \frac{r^2(2s-t)(s+t)}{3}$

$x_2 = mn - n^2 = r^2(st - t^2)$

Poněvadž součet $m + n$ má být dělitelný 3, lze zapsat, že $m = 3u - n,$ kde u je libovolné celé číslo. Pak zvolíme jako výchozí parametry celá čísla n a u (pro kořen k_2=0) a vygenerujeme kořeny k_1 a k_3 a také extrémy – body x_1 a x_2.

Vyjádříme $m = 3u - n$ a dosadíme do předešlých vztahů.

$k_1 = (3u - n)^2 - n^2 = 9u^2 - 6un = 3u(3u - 2n)$

$k_3 = 2(3u - n)n - n^2 = 6un - 3n^2 = 3n(2u - n)$

$\sqrt{D} = (3u - n)^2 - (3u - n)n + n^2 = 9u^2 - 9un + 3n^2 = 3(3u^2 - 3un + n^2)$

$x_1 = \frac{(2m-n)(m+n)}{3} = \frac{(6u-3n)3u}{3} = 9u(2u - n)$

$x_2 = mn - n^2 = 3un - n^2 = n(3u - n)$

Ilustrace 1

$m = 3, n = 2$

Zde není splněna podmínka, že součet je dělitelný 3, tak jeden z extrémů bude racionální.

$k_1 = m^2 - n^2 = 5$

$k_3 = 2mn - n^2 = 8$

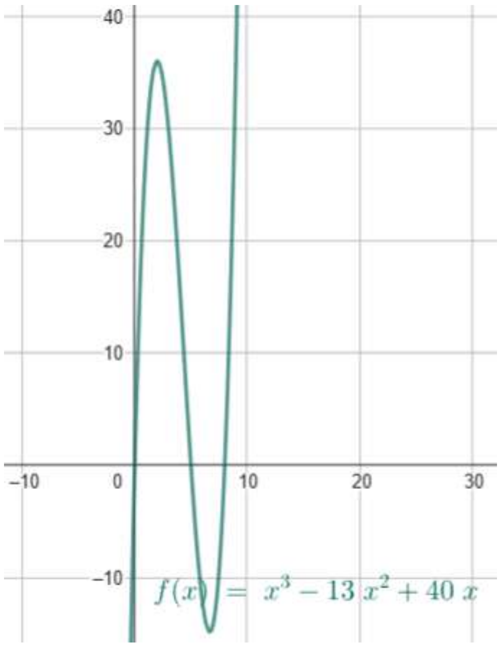
$\sqrt{D} = m^2 - mn + n^2 = 7$

$p = -(k_1 + k_3) = -13$

$q = k_1 k_3 = 40$

$x_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 3q}}{3} = \frac{13 \pm 7}{3} = 2, \frac{20}{3}$

$\boldsymbol{x^3 - 13x^2 + 40x = 0}$



Ilustrace 2

m=5, n=4

$k_1 = m^2 - n^2 = 9$

$k_3 = 2mn - n^2 = 24$

$\sqrt{D} = m^2 - mn + n^2 = 21$

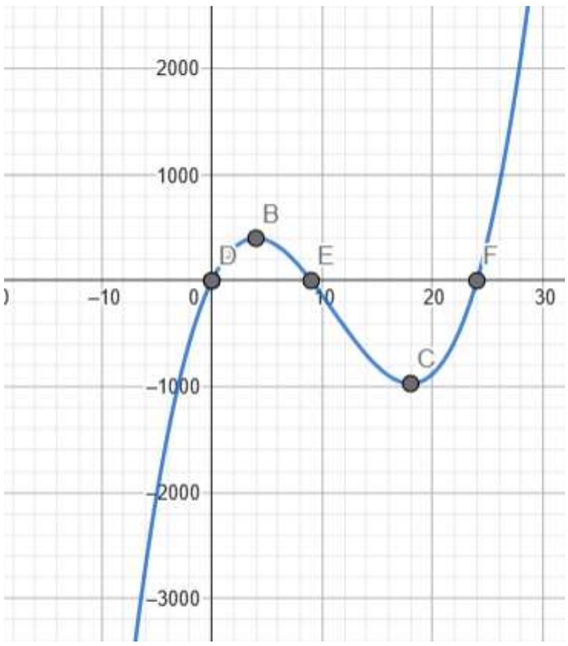
$p = -(k_1 + k_3) = -33$

$q = k_1 k_3 = 216$

$\boldsymbol{x^3 - 33x^2 + 216x = 0}$

$x_1 = \frac{(2m-n)(m+n)}{3} = \frac{6 \cdot 9}{3} = 18$

$x_2 = mn - n^2 = 20 - 16 = 4$



Výsledný vztah můžeme upravit tak, že graf funkce posuneme o libovolné celé číslo ve směru osy x. Toto číslo nám současně slouží jako kořen k2.

Když rovnici $x^3 - 33x^2 + 216x = 0$ posuneme o 1 doprava, dostaneme po úpravě

$(x-1)^3 - 33(x-1)^2 + 216(x-1) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - 33x^2 + 66x - 33 + 216x - 216 = x^3 - 36x^2 + 285x - 250$

a rovnici

$\boldsymbol{x^3 - 36x^2 + 285x - 250 = 0}$

s kořeny

$k_1 = 10$

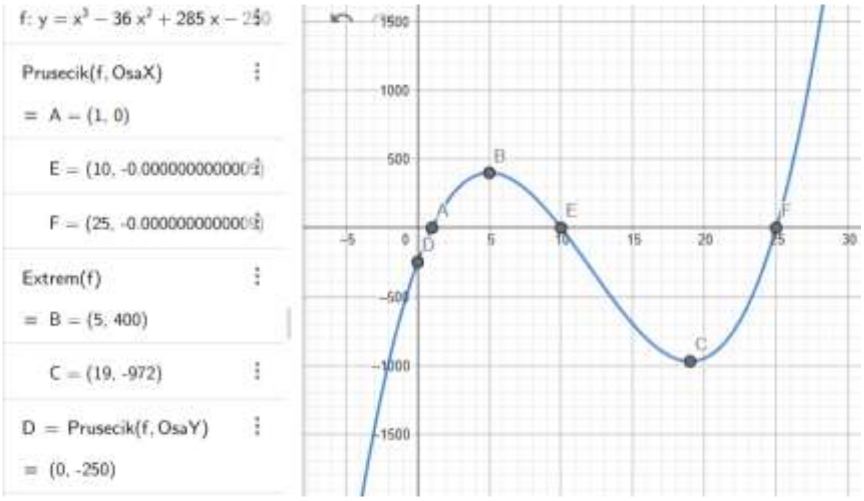
$k_2 = 1$

$k_3 = 25$

a extrémy

$x_1 = 19$

$x_2 = 5$



Generování kubických rovnic s celočíselným řešením obecně

Zvolme tedy pevně kořen k_2 a celá čísla u a n. Vygenerujeme rovnici s celočíselnými kořeny a celočíselnými extrémy.

$n, u, d \in Z$

$m = 3u - n$

$k_1 = m^2 - n^2 + d$

$k_2 = d$

$k_3 = 2mn - n^2 + d$

a s kořenem k_2

$p = -(k_1 + k_2 + k_3)$

$r = k_1 k_2 k_3$

$x_1 = \frac{(2m-n)(m+n)}{3} + d$

$x_2 = mn - n^2 + d$

z původního p_0 a q_0

$$\begin{aligned}(x-d)^3 + p_0(x-d)^2 + q_0\,(x-d) &= x^3 - 3dx^2 + 3d^2x - d^3 + p_0x^2 - 2p_0dx + d^2p_0 + q_0x - q_0d \\ &= x^3 + (p_0 - 3d)x^2 + (3d^2 - 2p_0d + q_0)x + (p_0d^2 - q_0d - d^3)\end{aligned}$$

máme nové

$p = p_0 - 3d$

$q = 3d^2 - 2p_0d + q_0$

$r = p_0d^2 - q_0d - d^3$

Takže p, q, r vyjádříme pomocí m, n, d a máme rovnici

$x^3 + px^2 + qx + r = 0$

$p = -(m^2 - 2n^2 + 2mn + 3d)$

$q = 3d^2 - 2d(m^2 - 2n^2 + 2mn) + (m^2 - n^2)(2mn - n^2)$

$r = d(m^2 - n^2 + d)(2mn - n^2 + d)$

s extrémy

$x_1 = \frac{(2m-n)(m+n)}{3} + d$

$x_2 = mn - n^2 + d$

Ilustrace pro nulový kořen

Pro jeden nulový kořen je výhodnější generovat rovnici pomocí parametrů m a n.

Ilustrace 1

m=4, n=5, k_2=0

$k_1 = m^2 - n^2 = -9$

$k_3 = 2mn - n^2 = 15$

$\sqrt{D} = m^2 - mn + n^2 = 21$

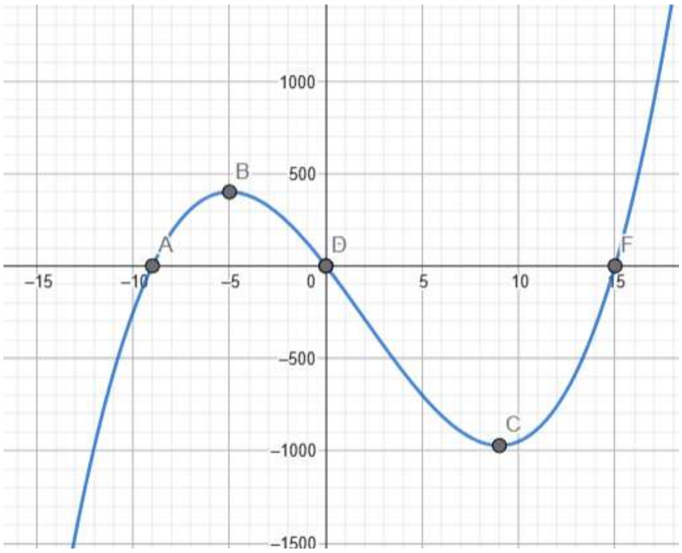
$p = -(k_1 + k_3) = -6$

$q = k_1 k_3 = -135$

$\boldsymbol{x^3 - 6x^2 - 135x = 0}$

$x_1 = \frac{(2m-n)(m+n)}{3} = \frac{3 \cdot 9}{3} = 9$

$x_2 = mn - n^2 = 20 - 25 = -5$



Ilustrace 2

m=5, n=1, k_2=0

$k_1 = m^2 - n^2 = 24$

$k_3 = 2mn - n^2 = 9$

$\sqrt{D} = m^2 - mn + n^2 = 21$

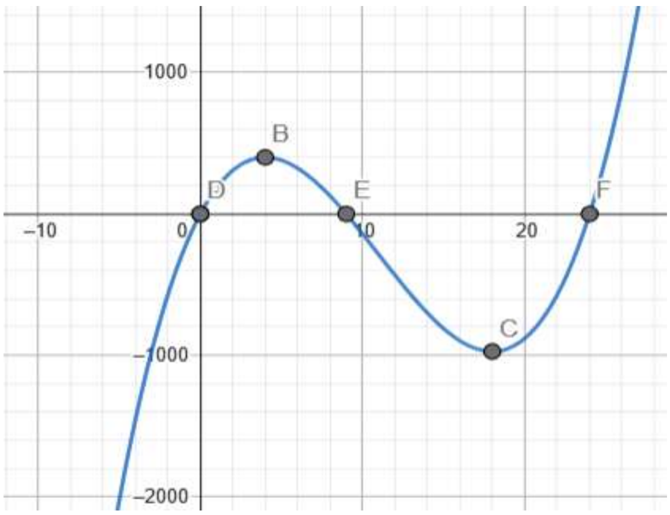
$p = -(k_1 + k_3) = -33$

$q = k_1 k_3 = 216$

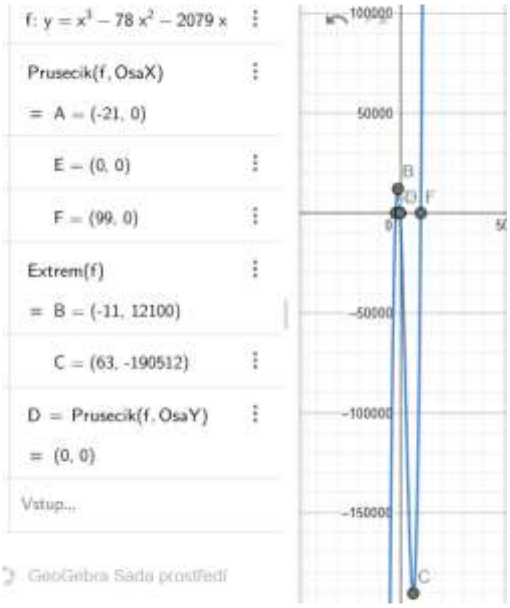
$\boldsymbol{x^3 - 33x^2 + 216x = 0}$

$x_1 = \frac{(2m-n)(m+n)}{3} = \frac{9 \cdot 6}{3} = 18$

$x_2 = mn - n^2 = 5 - 1 = 4$



Ilustrace 3



m=10, n=11, k_2=0

$k_1 = m^2 - n^2 = -21$

$k_3 = 2mn - n^2 = 99$

$\sqrt{D} = m^2 - mn + n^2 = 111$

$p = -(k_1 + k_3) = -78$

$q = k_1 k_3 = -2079$

$\boldsymbol{x^3 - 78x^2 - 2079x = 0}$

$x_1 = \frac{(2m-n)(m+n)}{3} = \frac{9 \cdot 21}{3} = 63$

$x_2 = mn - n^2 = 110 - 121 = -11$

Ilustrace 4

m=11, n=-2, k_2=0

$k_1 = m^2 - n^2 = 117$

$k_3 = 2mn - n^2 = -48$

$\sqrt{D} = m^2 - mn + n^2 = 147$

$p = -(k_1 + k_3) = -69$

$q = k_1 k_3 = -5616$

$\boldsymbol{x^3 - 69x^2 - 5616x = 0}$

$x_1 = \frac{(2m-n)(m+n)}{3} = \frac{9 \cdot 24}{3} = 72$

$x_2 = mn - n^2 = -22 - 4 = -26$

Generátor - shrnutí

Na závěr provedeme generování normalizované kubické rovnice pro parametry u, n a d, kde se jedná o libovolná celá čísla.

$x^3 + px^2 + qx + r = 0$

$k_1 = 3u(3u - 2n) + d$

$k_2 = d$

$k_3 = 3n(2u - n) + d$

$x_1 = 9u(2u - n) + d$

$x_2 = n(3u - n) + d$

pak

$$p = -(k_1 + k_2 + k_3)$$

$$q = k_1k_2 + k_1k_3 + k_2k_3$$

$$r = -k_1k_2k_3$$

Vztahy jsou jednoduché, takže je možné koeficienty p, q, r generovat pomocí tabulkového kalkulátoru nebo interaktivně pomocí prográmku v JS či Pythonu.

Výběr úloh

Najít rovnice s celočíselnými řešeními s co nejmenšími hodnotami p, q, r pak vyžaduje trochu experimentování. Zřejmě takových úloh nebude zas tak mnoho.

Shrnutí předešlých úloh a některé další.

Rovnice			Kořeny			Extrémy	
p	q	r	k1	k2	k3	x1	x2
-6	12	-8	2	2	2	--	--
0	-3	2	-2	1	1	-1	1
-9	24	34	-1	--	--	2	4
-6	0	81	-3	--	--	0	4
-12	48	279	-3	--	--	4	4
-9	0	0	9	0	0	0	6
-33	216	0	9	0	24	4	18
-36	258	-250	10	1	25	5	19
-78	-2079	0	-21	0	99	-11	63

A tabulka i s generátory

u	n	d	m	k1	k2	k3	x1	x2	p	q	r
1	0	0	3	9	0	0	18	0	-9	0	0
1	2	-1	1	-4	-1	-1	-1	1	6	9	4
1	1	1	2	4	1	4	10	3	-9	24	-16
-1	1	1	-4	16	1	-8	28	-3	-9	-120	128
1	2	1	1	-2	1	1	1	3	0	-3	2
1	-1	-1	4	14	-1	-10	26	-5	-3	-144	-140

Závěr

Kubické rovnice s celočíselnými koeficienty jsou v základním kurzu matematiky poměrně časté, ale rychle odvodit takovou rovnici tak, aby vycházela i celočíselná řešení extrémů (nejen kořenů) není triviální. Stejně tak při výkladu této látky (řešení kubických rovnic, diskuse řešení) není z časových důvodů se do hloubky zabývat rozbory řešení a odvozovat výsledné vztahy a vzorce. Nu a pokud si chcete v rozumném čase otestovat základní znalosti při řešení kubických rovnic a případně i konstrukce grafu polynomu třetího stupně, je zbytečné provádět složité přibližné výpočty kořenů, maxim a minim v reálných číslech. Takže využijete ty nejjednodušší kubické funkce.