Goniometrické funkce

Pavel Hrubý 2026

Předmluva

Taxem si řekl, že by nebylo na škodu projít si oblast goniometrie a do jednoho celku co nejstručněji shrnout poznatky o goniometrických funkcích. Ačkoliv se goniometrické funkce v matematice zavádějí již v učivu základní školy, stává se z nich na střední škole strašák a na vysoké škole bolehlav.

Nevěřil jsem vlastním očím, kolik bakalářských, ba diplomových prací s podobným nebo dokonce stejným námětem existuje. Jsou samozřejmě psány rigorózně s patřičnými formulacemi, větami, důkazy a odkazy na literaturu, které jsou pečlivě přepsány z jiných publikací a učebnic. Za všechny uvedené publikace chci jen zmínit odkazy na učebnice ZŠ (různých autorů), přehledy středoškolské matematiky (též od různých autorů), publikace profesorů Jarníka a Rektoryse, Bartschovu sbírku vzorců, ...

Tato publikace má v kostce připomenout problematiku goniometrie a co nejstručněji a vesměs bez důkazů objasnit základní pojmy a vztahy mezi goniometrickými funkcemi a návaznosti, které z nich vyplývají.

Obsah

Úvod

Historie a vývoj goniometrických (neboli trigonometrických) funkcí je fascinující cesta, která trvala tisíce let a byla motivována především potřebami astronomie, navigace a geodézie. Počátky najdeme již v antice (Řecko). Za "otce" trigonometrie jsou často považováni řečtí astronomové Hipparchos (asi 190–120 př. n. l.) a později Klaudios Ptolemaios (asi 85–165 n. l.). Zabývali se studiem nebeských těles a pro své výpočty potřebovali vztahy mezi úhly a délkami stran v trojúhelnících, často vepsaných do kruhu. O další rozvoj se postarali učenci v Indii a Arábii. Kolem 5. století n. l. indičtí matematici, jako například Árjabhata, rozvinuli koncept, který se blížil moderní funkci sinus (nazývaný *arádha-džjá*, polotětiva). Sestavili první známé tabulky sinů, které byly přesnější a praktičtější než řecké tabulky tětiv. Arabští matematici v 9. a 10. století přejali a dále rozvinuli indické poznatky. Zavedli a používali i ostatní funkce jako kosinus, tangens a kotangens. Přispěli k velkému zpřesnění výpočtů a metod a jejich práce se staly mostem mezi starověkými a evropskými znalostmi. Arabské texty byly přeloženy do latiny a trigonometrie se postupně dostala do Evropy. Teprve v 16. a 17. století, díky matematikům jako Georg Joachim Rheticus a později Isaac Newton a Gottfried Wilhelm Leibniz, získaly goniometrické funkce své dnešní analytické pojetí a byly definovány jako funkce reálné proměnné. Švýcarský matematik Leonhard Euler (18. století) hrál klíčovou roli v konsolidaci a standardizaci goniometrických funkcí v zavedení zkratek *sin*, *cos*, *tg* a jejich definování pomocí jednotkové kružnice a nekonečných řad, což umožnilo jejich široké využití v analytické matematice a fyzice. Samotný termín "goniometrické funkce" (z řeckého *gonia* - úhel a *metron* - míra, tedy funkce měřící úhly) prosadil na počátku 20. století významný matematik a didaktik Felix Klein.

Goniometrické funkce se tak vyvinuly z praktických astronomických výpočtů ve starověku až po základní stavební kameny moderní matematiky a inženýrství, které nacházejí uplatnění v mnoha oborech, od navigace po zpracování signálů.

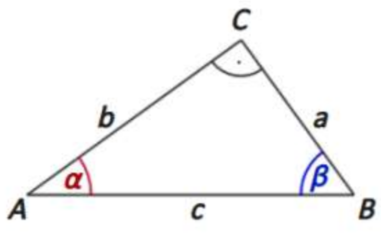
Podívejme se na ně blíže.

Základní škola – 9. třída

Poté, co se žáci základní školy v matematice seznámili s pojmem funkce a vlastnostmi podobných trojúhelníků, došlo i na goniometrické funkce. Goniometrické funkce jsou zde definovány jako poměry stran v pravoúhlém trojúhelníku. Evidentně se bude jednat o funkce úhlů pouze od 0° do 90°.

Definice goniometrických funkcí na ZŠ.

Zvolíme standardní značení pravoúhlého trojúhelníka a pak definujeme



a ... odvěsna protilehlá úhlu α a přilehlá úhlu β
b ... odvěsna protilehlá úhlu β a přilehlá úhlu α
c ... přepona

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} \qquad \cos \alpha = \frac{b}{c} \qquad \mathrm{tg}\, \alpha = \frac{a}{b}$$

$$\sin \beta = \frac{b}{c} \qquad \cos \beta = \frac{a}{c} \qquad \mathrm{tg}\, \beta = \frac{b}{a}$$

Dodefinujeme $\sin 0^\circ = 0$ a $\cos 0^\circ = 1$ (pro úhel 0° se nejedná o trojúhelník).

Goniometrické vzorce ZŠ

Na základě těchto definic je možné zapsat i další vztahy mezi goniometrickými funkcemi.

Stěžejní vztah, který lze jednoduše odvodit je

$$(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1$$

a přímo z definice

$$\sin\alpha = \cos\beta = \cos(90^\circ - \alpha)$$

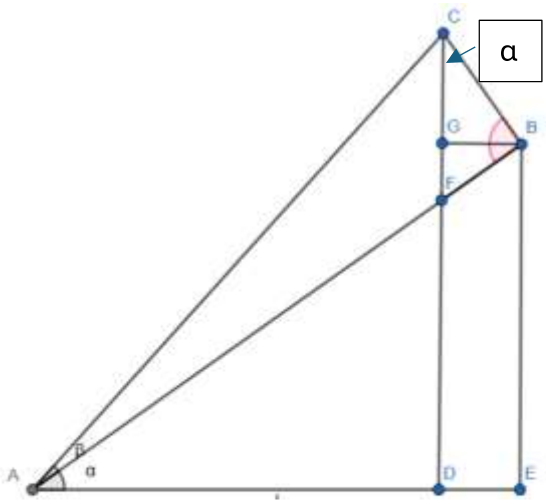
a také

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

Dalšími vztahy jsou součtové vzorce, kde α a β jsou dva libovolné úhly, které jsou v součtu menší než 90°.

Pro odvození vztahů použijeme následující náčrtek



$$\sin(\alpha+\beta) = \frac{CD}{CA} = \frac{CG + GD}{CA} = \frac{CG + BE}{CA} = \frac{CB\cdot\cos\alpha + AB\cdot sin\alpha}{CA}$$
$$= \frac{CB}{CA}\cdot\cos\alpha + \frac{AB}{CA}\cdot\sin\alpha = \sin\beta\cos\alpha + \cos\beta\cdot\sin\alpha$$

a tedy

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

obdobně

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

Odvození těchto vztahů s komentářem pro pravoúhlé trojúhelníky nalezneme např. na Khan Academy https://cs.khanacademy.org/math/trigonometry/trig-equations-and-identities/intro-to-trig-angle-addition-identities/v/proof-angle-addition-sine

Na základě výše uvedených vztahů, lze odvodit řadu dalších vztahů mezi goniometrickými funkcemi různých úhlů např.

$$\sin(2\alpha) = \sin(\alpha + \alpha) = \sin\alpha\cos\alpha + \cos\alpha\sin\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

apod.

Více vztahů je odvozeno později na SŠ.

Tabulka základních hodnot goniometrických funkcí.

Dále nám tyto definice umožňují zjistit funkční hodnoty vybraných úhlů.

Nejjednodušší je určení hodnot pro 45°, kdy se $\alpha = \beta = 45^\circ$. Pak máme z definice $\sin\alpha = \sin\beta = \cos\alpha = \frac{a}{c} = \frac{b}{c}$ pak

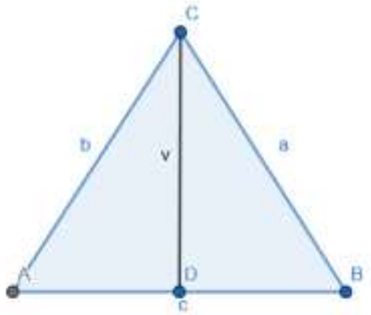
$$(\sin 45^\circ)^2 + (\cos 45^\circ)^2 = (\sin 45^\circ)^2 + (\sin 45^\circ)^2 = 2(\sin 45^\circ)^2 = 1$$

$$(\sin 45^\circ)^2 = \frac{1}{2}$$

a zlomek $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$ je kladný, tak

$$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Pro úhly 30° a 60° využijeme vlastnosti rovnostranného trojúhelníka. Strany trojúhelníka jsou stejně dlouhé a úhel při vrcholech je 60°. Výška *v* půlí úhel při vrcholu *C* a je kolmá na protější stranu.



$$\sin 60^\circ = \frac{v}{b} = \frac{\sqrt{b^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2}}{b} = \frac{\sqrt{\frac{3b^2}{4}}}{b} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

pak máme ihned $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

a také $\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{\frac{b}{2}}{b} = \frac{1}{2}$

Hodnoty funkcí tangens a kotangens dostaneme ze vztahů $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha}$.

Takže máme tabulku hodnot vybraných úhlů funkcí sinus, kosinus, tangens a kotangens.

α	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\mathrm{tg}\,\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	---
$\cot\alpha$	---	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Poznámka: tangens pravého úhlu a kotangens nuly není definován.

Střední škola

Na základní škole sice bylo zmíněno, že sinus a kosinus jsou funkce, ale jen pro hodnoty úhlů ve stupních, a to jen omezeně od 0° do 90°. Ovšem „stupeň" není reálné číslo. Funkce v reálných číslech definujeme na základě proměnné, která je reálným číslem. Tedy chceme mít funkci $S: y = \sin x$ a $C: y = \cos x$, kde x je reálné číslo, určit její definiční obor, obor hodnot její graf a další vlastnosti.

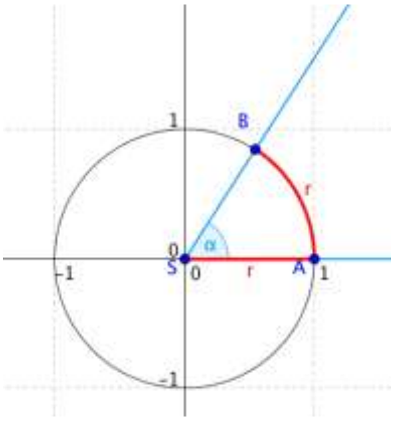
Proto místo stupně použijeme jiný systém měření velikosti úhlu. Zavedeme míru úhlu, kterou nazveme mírou obloukovou.

Orientovaný úhel a radiány

Zavedení reálné proměnné v goniometrických funkcích vyžaduje seznámení se s obloukovou mírou.

Vznik obloukové míry je připisován matematiku Rogeru Coteovi, ač její obdobu používal už arabský matematik Al-Káší. Jedná se o délku oblouku, měřeného na kružnici od jistého pevného bodu proti směru pohybu hodinových ručiček, tedy levotočivě. Pokud má kružnice poloměr r, a délka oblouku je s, pak velikost úhlu φ v obloukové míře je dána poměrem $\varphi = \frac{s}{r}$.

V případě, že poloměr kružnice je jednotka, pak délka oblouku *s* je přímo rovna velikosti úhlu. Za jednotku obloukové míry byl zvolen radián (zkratka *rad*), což je úhel, jehož délka oblouku je rovna poloměru kružnice.



$\alpha = 1\, rad$

Pak platí, že velikost plného úhlu (360°) je roven $2\pi\ rad$. Pouhou trojčlenkou tak máme převod velikostí úhlů od 0° do 360° na radiány a naopak.

$$\alpha\ rad = \frac{\alpha^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi$$

$$\alpha^\circ = \frac{\alpha\ rad}{2\pi} \cdot 360^\circ$$

Tedy máme, že 1 radián ve stupních je $\alpha^\circ = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57{,}2958°$

Tabulka pro základní úhly pak vypadá takto

stupně	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
radiány	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

a pro některé vybrané další úhly

stupně	120°	135°	150°	210°	225°	240°	300°	315°	330°
radiány	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$

A co úhly větší než 2π ?

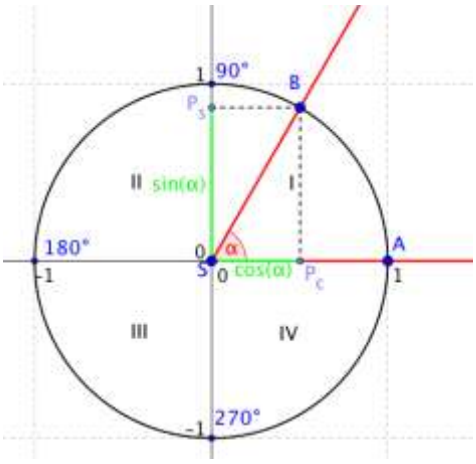
Převodní vztahy mezi radiány a stupni uvedené výše můžeme použít pro libovolná reálná čísla a libovolné velikosti úhlů. Takže úhel může mít velikost třeba 1000 rad. Použití? Třeba ve fyzice při zkoumání pohybu po kružnici, kde úhlová dráha může být libovolné reálné číslo.

Jednotková kružnice

Jistě jste se na střední škole seznámili s jednotkovou kružnicí a definicí goniometrických funkcí jakožto závislosti délky poloviny tětivy na velikosti orientovaného úhlu. Takto vznikly i goniometrické funkce v antice, kde místo jednotkové kružnice byla používána kružnice o poloměru šedesát.

Definice sin a cos

Definici funkcí sin a cos v pravoúhlém trojúhelníku nyní rozšíříme tak, že pravoúhlý trojúhelník umístíme do kružnice o poloměru 1. Úhel alfa bude nyní úhel $\sphericalangle ASB$ a bude orientovaný. Polopřímku SA prohlásíme za konstantní a polopřímku SB za proměnnou v závislosti na úhlu alfa. Souřadnice bodu B na kružnici pak definujeme jako $[\cos\alpha, \sin\alpha]$. Tedy x-ová souřadnice bodu B je $\cos\alpha$, y-ová souřadnice bodu B je $\sin\alpha$.



V náčrtku jsou římskými číslicemi označeny části roviny nazývané kvadranty. Podle definice pak sin a cos mohou nabývat v jednotlivých kvadrantech kladných nebo záporných hodnot.

kvadrant	I.	II.	III.	IV.
sin	+	+	-	-
cos	+	-	-	+

Hodnoty funkcí sinus a kosinus v kvadrantech

Na základě definice pomocí jednotkové kružnice lze přepočítávat hodnoty funkcí sin a cos tak, abychom mohli využít pouze znalost hodnot těchto funkcí x_0 **v prvním kvadrantu**. Tyto hodnoty pro některé úhly jsme si odvodili v části o pravoúhlém trojúhelníku. Takže bude platit přepočet

kvadrant	I.	II.	III.	IV.
sin	+	+	-	-
cos	+	-	-	+
tg	+	-	+	-
	$x_0 = x$	$x_0 = \pi - x$	$x_0 = x - \pi$	$x_0 = 2\pi - x$
	$x_0 = x$	$x_0 = 180^\circ - x$	$x_0 = x - 180^\circ$	$x_0 = 360^\circ - x$

Příklad

úhel $\frac{5\pi}{4} = 225^\circ$ je ze třetího kvadrantu, sin je zde záporný

$\sin\frac{5\pi}{4} = -\sin\left(\frac{5\pi}{4} - \pi\right) = -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

nebo ve stupních

$\sin 225^{\circ} = -\sin(225^{\circ} - 180^{\circ}) = -\sin 45^{\circ} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Součtové vzorce

I v jednotkové kružnici platí součtové vzorce, které lze odvodit podobně jako na základní škole.

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

Sudá, lichá funkce

Z definice vyplývá, že funkce sin je lichá funkce, platí $\sin(-x) = -\sin x$, funkce cos je sudá funkce $\cos(-x) = \cos x$.

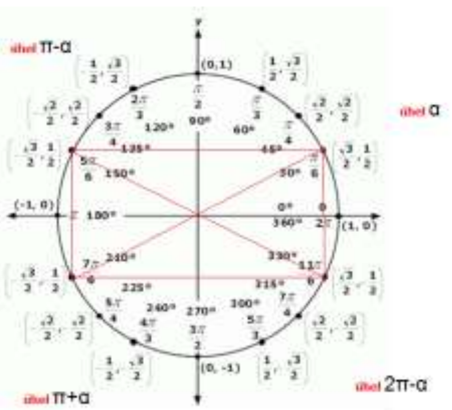
$\sin(x) = \sin\big(0 - (-x)\big) = \sin 0\cos(-x) - \cos 0\sin(-x) \;= -\sin(-x)$

$\cos(-x) \;= \cos(0 - x) = \cos 0\cos x - \sin 0\sin x = \cos x$

Dále je nutné si všimnout, že jedné zadané hodnotě funkce sin nebo cos budou odpovídat dva úhly v různých kvadrantech, např. pro $\sin\alpha = \frac{1}{2}$ rovnici vyhovují úhly $\alpha = 30^{\circ}$ a také $\alpha = 150^{\circ}$. Tento poznatek zohledníme dále při řešení elementárních goniometrických rovnic.

Dále se dohodněme, že úhly zadávané ve stupních budeme označovat řeckými písmeny a úhly v radiánech jako reálné proměnné (např. x).

A ještě přehledně.



Periodická funkce

Poněvadž jsou funkce sin a cos definovány jako y a x souřadnice bodu na jednotkové kružnici platí, že po jedné otočce po kružnici (tedy po přičtení k úhlu x úhlu 2π) dostaneme pro funkce sin a cos tytéž hodnoty. Tedy platí

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x$$

$$\cos(x + 2\pi) = \cos x$$

Navíc otočku můžeme provést kolikrát chceme v kladném i záporném směru, tedy platí

$$\sin(x + 2\pi k) = \sin x$$

$$\cos(x + 2\pi k) = \cos x$$

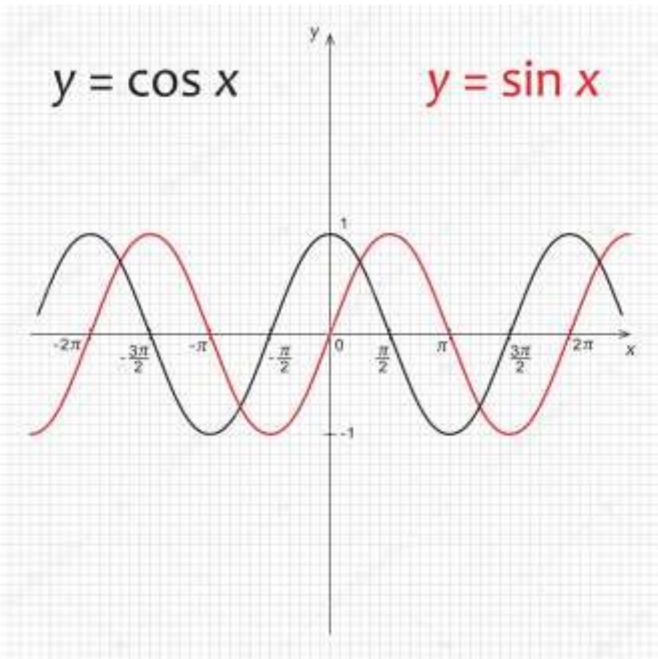
kde k je libovolné celé číslo.

Funkce, pro kterou platí $f(x + k \cdot P) = f(x)$, kde P je pevně zvolené co nejmenší reálné číslo a k je libovolné celé číslo, nazýváme periodickou funkcí. Tedy funkce sin a cos jsou periodické s nejmenší periodou 2π.

Grafy funkcí sin a cos mají stejný tvar a jsou proti sobě posunuty na ose x o $\frac{\pi}{2}$.

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos x \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \sin x \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \sin x$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin x \cos\frac{\pi}{2} + \cos x \sin\frac{\pi}{2} = \cos x$$



Funkce tangens (a také kotangens) mají periodu π.

Vzorce

Všechny goniometrické vzorce lze odvodit z těchto základních identit (Vojáček, 2017).

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1$

$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$\cos x = \cos(-x)$

$\sin x = -\sin(-x)$

$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$

$\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$

Zde všechny vzorce odvozovat ani vypisovat nebudu. Najdeme je na internetu nebo v (Bartch, 1971)

Rovnice

Elementární rovnice

Elementárními rovnicemi jsou rovnice

$\sin x = A$

$\cos x = A$

kde A je reálné číslo z intervalu $\langle -1, 1\rangle$.

Rovnice vyřešíme pro $|A|$ nejdříve pro neznámou x v intervalu $\langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$ (tabulky, kalkulačka), řešení označíme x_0.

Pak podle znaménka A určíme, ve kterých kvadrantech leží řešení a zapíšeme konečné řešení.

Příklad

$\sin x = -\frac{1}{2}$

$x_0 = \frac{\pi}{6}$

funkce sinus je záporná ve III. a IV. kvadrantu, tedy

$x_1 = \left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi$

$x_2 = \left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi$

Pro rovnici

$\tan x = A$

určíme x_0 a řešení je jen jedno a periodou π.

Příklad

$\tan x = -1$

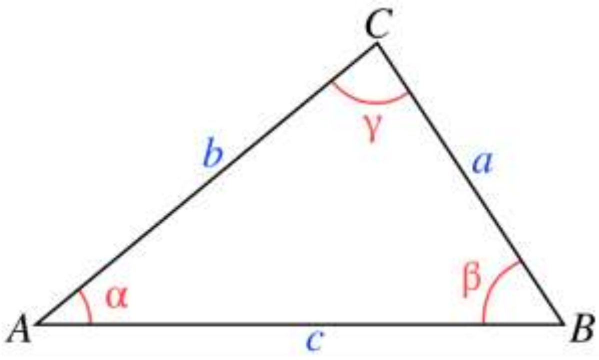
$x_0 = \frac{\pi}{4}$

funkce tangens je záporná ve II. a IV. kvadrantu.

$x = \left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) + k\pi$

Trigonometrie

Velmi časté je použití goniometrických funkcí při řešení úloh z trigonometrie. Základem je výpočet hodnot prvků v obecném trojúhelníku. Zde se zmíním alespoň o dvou nejdůležitějších větách známých již od antiky. (EUCLIDES) Pro obecný trojúhelník platí:



Sinová věta

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2r$$

Kde *r* je poloměr opsané kružnice.

Kosinová věta

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ac\cos\beta$$

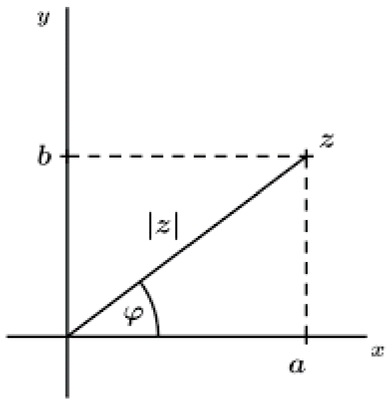
Rozšiřující učivo SŠ

Ve školských vzdělávacích programech pro gymnázia a technické střední školy je standardně ve čtvrtém ročníku zařazeno učivo o komplexních číslech. Odborné školy tuto oblast matematiky vesměs vynechávají.

Komplexní číslo v goniometrické tvaru

Zápis komplexního čísla v algebraickém a goniometrickém tvaru. i je imaginární jednotka

$$i = \sqrt{-1}$$



$z = a + bi$

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

Moivreova věta

$(\cos x + \mathrm{i}\sin x)^n = \cos(nx) + i\sin(nx)$

Důkaz lze provést i na SŠ pomocí indukce.

A po použití binomické věty

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\cos x)^{n-k} (\mathrm{i}\sin x)^k = \cos(nx) + i\sin(nx)$$

$$\cos(nx) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{2k} (\cos x)^{n-2k} (\sin x)^{2k}$$

$$\sin(nx) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{2k+1} (\cos x)^{n-2k-1} (\sin x)^{2k+1}$$

Funkce sec a csec

Kdo studuje nebo studoval stavební fakultu a narazil na problematiku návrhů stavebních prvků namáhaných kombinací tlaku a ohybu, setkal se se vzorci, které obsahují funkce sekans a kosekans.

Definice jsou následující

$\sec x = \frac{1}{\cos x}$

$\csc x = \frac{1}{\sin x}$

Pak platí např.

$(\sec x)^2 = 1 + (\tan x)^2$

Inverzní funkce ke goniometrickým funkcím

Tyto funkce se nazývají cyklometrické funkce.

$\arcsin x$ je inverzní funkcí k funkci sinus, je definována v intervalu $\langle -1,1 \rangle$ a nabývá funkčních hodnot $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$.

$\arccos x$ je inverzní funkcí k funkci kosinus, je definována v intervalu $\langle -1,1 \rangle$ a nabývá funkčních hodnot $\langle 0, \pi \rangle$.

$\arctan x$ je inverzní funkcí k funkci tangens, je definována pro všechna reálná čísla a nabývá funkčních hodnot $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$.

Více na Wikipedii https://www.wikiwand.com/cs/articles/Cyklometrick%C3%A1_funkce

Derivace a integrál goniometrických funkcí

V gymnaziální matematice se vykládají i základy infinitezimálního počtu. Mezi vzorci pro derivování funkcí se objevují vztahy pro derivace funkcí sinus, kosinus, tangens s kotangens.

Základem pro jejich odvození je hodnota limity

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

z čehož lze odvodit vztah

$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

$1 = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 = \lim_{x \to 0} \frac{(\sin x)^2}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - (\cos x)^2}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{(1 + \cos x)(1 - \cos x)}{x^2} = \lim_{x \to 0} (1 + \cos x) \cdot \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = 2 \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

Výpočet těchto limit na SŠ lze (na základě definice funkce sin pomocí jednotkové kružnice) provést pomocí definice limity nebo pomocí náhledu na přírůstek délky oblouku (to sice není rigorózní, ale pro SŠ to stačí).

Nejjednodušší je důkaz založený na větě o třech limitách, kde využijeme nerovnosti

$$\sin x < x < \tan x$$

Po úpravě

$$x < \frac{\sin x}{\cos x} \to \cos x < \frac{\sin x}{x}$$

Pak poněvadž (délka tětivy lomeno délkou oblouku)

$$\frac{\sin x}{x} < 1$$

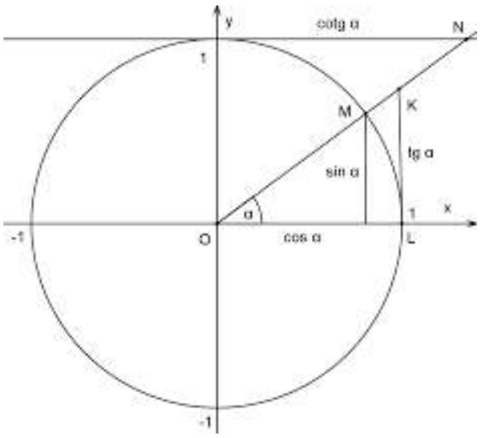
Platí

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

a použijeme větu o třech limitách.

(Také by šlo využít L´Hospitalovo pravidlo, pokud je do látky SŠ o derivacích zařazen jeho výklad. Ale zde zatím neznáme derivaci sin x.)

Pomocí délky oblouku – přístupné i žákům na ZŠ, není třeba je obtěžovat limitou 😊



Délka oblouku LM je rovna velikosti úhlu α v obloukové míře a sin je y-ová souřadnice bodu M. Pak y-ová souřadnice je o přírůstek h menší než délka oblouku.

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = \lim_{\alpha \to 0} \frac{y}{\alpha} = \cdots = \lim_{h \to 0} \frac{\alpha - h}{\alpha} = 1$$

A regulérně přímo pomocí definice

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0;\ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0;\ 0 < |x| < \delta \Rightarrow \left|\frac{\sin \alpha}{\alpha} - 1\right| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0; 0 < |x| < \delta \Rightarrow \left|\frac{y - \delta}{y} - 1\right| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0; 0 < |x| < \delta \Rightarrow \left|\frac{-\delta}{y}\right| < \varepsilon$$

$$0 < \frac{\delta}{y} < \varepsilon$$

y je libovolně malé číslo (a určitě menší než 1), takže zvolme

$$y = \varepsilon < 1$$

$$0 < \delta < \varepsilon^2$$

□

Pak derivace funkce sinus v bodě x je

$(\sin x)' = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2\cos\frac{x+h+x}{2}\sin\frac{x+h-x}{2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2\cos\frac{2x+h}{2}\sin\frac{h}{2}}{h} = 2\lim_{h\to 0}\left(\cos\frac{2x+h}{2}\right) \cdot \lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{h} = 2\cos x \cdot \lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{2\cdot\frac{h}{2}} = \cos x \cdot \lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\cdot\frac{h}{2}} = \cos x$

Podobně pak

$(\cos x)' = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-2\sin\frac{x+h+x}{2}\sin\frac{x+h-x}{2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-2\sin\frac{2x+h}{2}\sin\frac{h}{2}}{h} = -2\lim_{h\to 0}\left(\sin\frac{2x+h}{2}\right) \cdot \lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{h} = -\sin x \cdot \lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{2\cdot\frac{h}{2}} = -\sin x$

$(\cos x)' = -\sin x$

Při odvození jsme použili vztahy, které lze odvodit ze součtových vzorců:

$\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$

$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$

A za využití věty o derivaci podílu funkcí pak máme pro funkce tangens a kotangens

$(\tan x)' = \frac{1}{(\cos x)^2}$

$(\cot x)' = -\frac{1}{(\sin x)^2}$

Primitivní funkce pro sin a cos pak jsou (až na konstantu K)

$\int \sin x \, dx = -\cos x + K$

$\int \cos x \, dx = \sin x + K$

$\int \tan x \, dx = -\ln(\cos x) + K$

$\int \cot x \, dx = \ln(\sin x) + K$

Vysoká škola

V základním kurzu vysokoškolské matematiky (matematické analýzy) pak máme minimálně dvě metody pro zavedení funkcí sin a cos. První z nich je axiomatické zavedení těchto funkcí, kde pro důkaz je nutné použít základy teorie řad a základy teorie řešení diferenciálních rovnic. Druhý způsob definování funkcí sin a cos vychází z teorie nekonečných posloupností, teorie řad a základů komplexní algebry.

Axiomy pro funkce sinus a kosinus

Axiomatická definice goniometrických funkcí (konkrétně funkcí sinus a kosinus) je formální přístup, který namísto spoléhání se na geometrické pojmy (jako je jednotková kružnice nebo pravoúhlý trojúhelník) definuje tyto funkce pomocí sady **axiomů** (funkcionálních rovnic a počátečních podmínek). Formálně tak splňuje požadavek axiomatické výstavby matematických konstrukcí a je tedy zásadní při dokazování existence těchto funkcí.

Z těchto axiomů lze následně odvodit všechny ostatní vlastnosti, včetně periodicity, součtových vzorců, existence derivací a vztahu k číslu π.

Axiomatická definice obvykle vychází z následujících vlastností, které musí funkce $S(x)$ (sinus) a $C(x)$(kosinus) splňovat pro všechna reálná čísla x, y

Podle profesora Jarníka (Diferenciální počet I.)

Věta 1.1 Existuje právě jedna dvojice funkcí $S(x)$ a $C(x)$ a právě jedno kladně reálné číslo, které označíme π, tak, že:

(1) funkce $S(x)$ a $C(x)$ jsou definovány pro všechna reálná čísla,
(2) $S(0) = 0$,
(3) $S(x)$ je rostoucí na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$,
(4) pro všechna $x, y \in R$ platí funkcionální rovnice
$S(x + y) = S(x)C(y) + C(x)S(y)$
(5) pro libovolné $x \in R$. platí

$$C(x) = S\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

(6) platí

$$\lim_{x\to 0} \frac{S(x)}{x} = 1$$

Definice 1.2. Funkci S z věty 1.1 nazýváme *sinus* a značíme *sin*. Funkci C nazýváme *kosinus* a značíme *cos*.

Důkaz věty 1.1 lze provést na základě teorie diferenciálních rovnic, kde vycházíme z věty o jednoznačném řešení diferenciálních rovnic

$$Y' = A \cdot Y$$

s počáteční podmínkou V.

Pro matici A(2x2) a vektor Y pak konkrétně

$$Y = \begin{pmatrix} C(x) \\ S(x) \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$Y^{\prime} = A \cdot Y$$

pro počáteční podmínku $V(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Tato rovnice má v teorii diferenciálních rovnic právě jedno řešení Y. Tedy pro

$$Y^{\prime} = A \cdot Y = A \begin{pmatrix} C \\ S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aC + bS \\ cC + dS \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C^{\prime} \\ S^{\prime} \end{pmatrix}$$

$$C^{\prime} = aC + bS$$

$$S^{\prime} = cC + dS$$

Řešením je pak

$$Y = e^{Ax} \cdot V$$

Za použití axiomů (2, 4, 6) platí pro derivace (viz odvozeno z axiomu o limitě dříve)

$$C^{\prime} = -S$$

$$S^{\prime} = C$$

$$S(0) = 0$$

$$C(0) = 1$$

Pak

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -A$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Takže

$$A^{2k} = (-1)^k I$$

$$A^{2k+1} = (-1)^k A$$

Dokončíme řešení

$$e^{Ax} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(Ax)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} I + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{(2k+1)}}{(2k+1)!} A$$

$$Y = e^{Ax} \cdot V = \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} I + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{(2k+1)}}{(2k+1)!} A \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \cdots =$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{(2k+1)}}{(2k+1)!} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Z toho tedy plyne jednoznačná existence funkcí

$$Y(x) = \begin{pmatrix} C(x) \\ S(x) \end{pmatrix}$$

$$C(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

$$S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{(2k+1)}}{(2k+1)!}$$

Ztotožnění funkcí S a C s funkcemi sin a cos definovaných pomocí jednotkové kružnice pak provedeme podle věty: Pokud mají funkce totožný Taylorův rozvoj, jsou totožné.

Definice pomocí řad

Na základě předešlé kapitoly je tedy možné funkce **sinus** a **kosinus** definovat nekonečnými řadami, které konvergují pro všechna $x \in \mathbb{R}$

Funkce sinus:

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Tato řada obsahuje pouze liché mocniny xa střídají se v ní znaménka, což odráží lichost funkce sinus.

Funkce kosinus:

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

Tato řada obsahuje pouze sudé mocniny x(včetně nulté mocniny $x^0 = 1$) a střídají se v ní znaménka, což odráží sudost funkce kosinus.

Ostatní goniometrické funkce lze definovat pomocí těchto základních řadových definic:

Funkce tangens je definována jako podíl sinu a kosinu:

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

Tato definice platí pro všechna x, pro která $\cos(x) \neq 0$

Její řadový rozvoj je složitější a konverguje jen na určitých intervalech.

Funkce kotangens je definována jako podíl kosinu a sinu:

$$\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

Platí pro všechna x, pro která $\sin(x) \neq 0$

Tyto definice pomocí řad poskytují rigorózní analytický základ pro goniometrické funkce v rámci vyšší matematiky, často nezávisle na geometrické definici pomocí pravoúhlého trojúhelníku nebo jednotkové kružnice. V praxi se pro numerický výpočet hodnot funkcí používají algoritmy, které často vycházejí právě z těchto nebo podobných řadových rozvojů.

Matematická analýza reálných funkcí

Předpokládejme, že máme k dispozici pouze rozvoje nějakých neznámých funkcí

$$\mathrm{S}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\mathrm{C}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

a máme zjistit jejich vlastnosti.

Evidentně máme ihned tyto výsledky

$$S(0) = 0$$

$$S(-x) = -S(x)$$

$$C(0) = 1$$

$$C(-x) = C(x)$$

$$S'(x) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \right)' = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\left(x^{2k+1}\right)'}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(2k+1)x^{2k}}{(2k+1)!}$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = C(x)$$

Podobně

$$C'(x) = -S(x)$$

a tedy (K je libovolná konstanta)

$$\int S(x)\,dx = -C(x) + K$$

$$\int C(x)\,dx = S(x) + K$$

Dále

$$\left(S^2(x) + C^2(x)\right)' = 2S(x)C(x) - 2C(x)S(x) = 0$$

Tedy

$$S^2(x) + C^2(x) = K$$

$$S^2(0) + C^2(0) = 1$$

$$S^2(x) + C^2(x) = 1$$

Je snad jasné, že ztotožnění funkcí S a C s funkcemi sin a cos je evidentní přes rovnosti Taylorových rozvojů. Ale pokud bereme S a C jako dosud neznámé funkce, můžeme odvodit i některé další vlastnosti těchto funkcí. Stěžejní je periodicita a vlastnosti elementárních operací s argumenty těchto funkcí.

Periodicita znamená existenci nějaké konstanty P, pro kterou má platit

$$C(x + P) = C(x)$$

$$S(x + P) = S(x)$$

Periodicita C vede na rovnici

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(x + P)^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \left(\sum_{l=0}^{2k} \binom{2k}{l} x^{2k-l} P^l \right) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

kde výsledkem má být

$$P = 8n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k + 1} = 2n\pi$$

a to víme, poněvadž známe

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k + 1}$$

Ekvilibristiku s těmito řadami si musíme odpustit. Existují jednodušší metody, viz dále.

Komplexní analýza

V komplexní analýze jsou goniometrické funkce (sinus a kosinus) definovány pomocí **komplexní exponenciály** (též Eulerova vzorce), nikoli geometricky pomocí trojúhelníku jako v reálném oboru. Toto rozšíření z reálné osy do celé komplexní roviny ℂ se provádí tak, aby funkce zůstaly holomorfní.

Eulerův vzorec

Základem bude číslo e – Eulerovo číslo. Toto číslo poprvé objevil Jakub Bernoulil 1683 ve vztahu pro spojité složené úročení

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Euler ukázal, že toto číslo lze vyjádřit nekonečnou řadou

$$\begin{aligned} e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{\infty}\lim_{n\to\infty}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}\cdot\frac{1}{n^k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a_1 n^{k-1}}{n^k}+\cdots\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!} \end{aligned}$$

Navíc ukázal, že

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$$

Pak dokázal, že tento vztah platí i pro komplexní čísla z, tedy

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}$$

Odtud pak pro reálné číslo x a imaginární jednotku i platí

$$e^{ix} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(ix)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!} + i\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \cos x + i\sin x$$

kde řady jsou Taylorovy rozvoje pro sinus a kosinus.

Z čehož plyne i nejkrásnější tvrzení matematiky,

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Dále Euler dokázal, že vztah platí i pro komplexní čísla z

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z \qquad \text{(Eulerův vzorec)}$$

Definice goniometrických funkcí

Další možností, jak definovat funkce sin a cos, je přímá definice a to i pro komplexní čísla. Pro libovolné komplexní číslo $z \in \mathbb{C}$ jsou funkce $\sin(z)$ a $\cos(z)$ definovány následovně:

Kosinus: $\cos(z) = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$

Sinus: $\sin(z) = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$

Tyto definice vycházejí z **Eulerova vzorce** (platného i pro komplexní z:)

$$e^{iz} = \cos(z) + i\sin(z)$$

a vzorce pro e^{-iz}

$$e^{-iz} = \cos(z) - i\sin(z)$$

Sečtením a odečtením těchto dvou rovnic a následným vyjádřením $\cos(z)$ a $\sin(z)$ dostaneme výše uvedené definice.

Ostatní goniometrické funkce jsou definovány analogicky pomocí sinu a kosinu, stejně jako v reálné analýze:

Tangens: $\mathrm{tg}(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)}$ (Definováno pro všechna z, kde $\cos(z) \neq 0$)

Kotangens: $\mathrm{cotg}(z) = \frac{\cos(z)}{\sin(z)}$ (Definováno pro všechna z, kde $\sin(z) \neq 0$)

Komplexní goniometrické funkce mají stejný tvar jako jejich Taylorovy (nebo Maclaurinovy) řady v reálném oboru.

V komplexní rovině jsou tyto funkce **neomezené**, na rozdíl od reálného oboru, kde platí $|\sin(x)| \leq 1$ a $|\cos(x)| \leq 1$

Pokud jsme seznámeni s hyperbolickými funkcemi, pak jsou funkce sin a cos přes své rozvoje s nimi úzce spjaty, například platí vztahy

$$\cos(iz) = \cosh(z) \text{ a } \sin(iz) = i\sinh(z)$$

Použití Eulerova vzorce

Pomocí Eulerova vzorce lze snadno odvodit vztahy pro goniometrické funkce.

Moivreova věta

$$\left(e^{ix}\right)^n = e^{inx}$$

$$(\cos x + \mathrm{i}\sin x)^n = \cos nx + \mathrm{i}\sin nx$$

$$(\cos x - \mathrm{i}\sin x)^n = \cos nx - \mathrm{i}\sin nx$$

Součtové vzorce

$$e^{i(x+y)} = e^{ix}e^{iy}$$

$$\cos(x+y) + i\ \sin(x+y) = (\cos x + \mathrm{i}\sin y)(\cos x + \mathrm{i}\sin y)$$
$$= (\cos x)^2 - (\sin y)^2 + 2i\cos x\ \sin y$$

$$\cos(x+y) = (\cos x)^2 - (\sin y)^2$$

$$\sin(x+y) = 2\cos x\ \sin y$$

Jedničkovost

$$1 = e^0 = e^{i(x-x)} = e^{ix}e^{-ix} = (\cos x + \mathrm{i}\sin x)(\cos x - \mathrm{i}\sin x) = (\cos x)^2 + (\sin x)^2$$

Posunutí

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) + i\ \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = e^{i\left(x+\frac{\pi}{2}\right)} = e^{ix}\,e^{i\frac{\pi}{2}} = ie^{ix} = -\sin x + i\ \cos x$$

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$$

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \cos x$$

Limita

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = = \lim_{x\to 0}\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2ix} \overset{L.H.}{\triangleq} \lim_{x\to 0}\frac{ie^{ix} + ie^{-ix}}{2i} = 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

Derivace

$$\left(e^{ix}\right)' = ie^{ix}$$

$$(\cos x + \mathrm{i}\sin x)' = \mathrm{i}\cos x - \sin x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

Doplněk

Hyperbolické funkce

Jako hyperbolické funkce se v matematice označuje skupina několika funkcí analogicky podobných k funkcím goniometrickým. Základními funkcemi jsou hyperbolický sinus (sinh) a kosinus (cosh), ze kterých je odvozen hyperbolický tangens (tanh), kotangens (coth), sekans (sech) a kosekans (csch). Inverzní funkce k funkcím hyperbolickým se označují jako hyperbolometrické funkce.

$$\sinh\ x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x} - 1}{2e^x}$$

$$\cosh\ x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x} + 1}{2e^x}$$

Hyperbolický sinus a kosinus splňují podmínku:

$$\cosh^2\ x - \sinh^2\ x = 1$$

Hyperbolické funkce se často objevují v řešení některých diferenciálních rovnic, nebo např. v rovnici křivky řetězovky.

A tedy platí i pro komplexní z

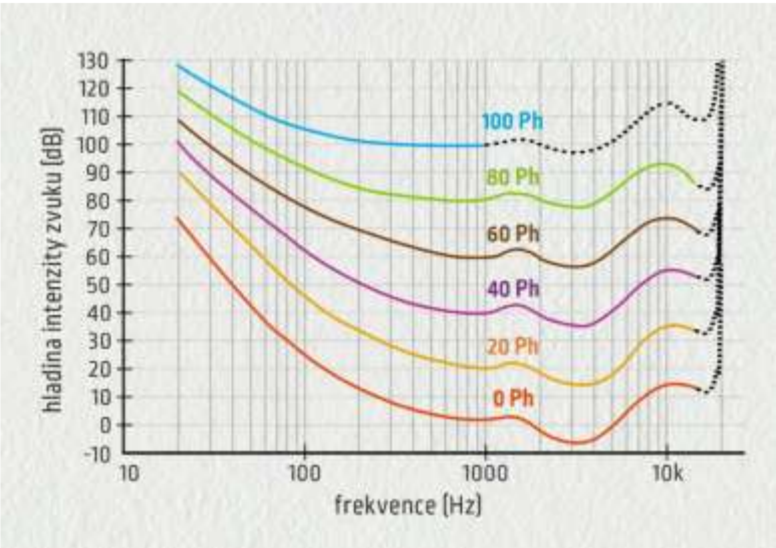
$$e^z = \cosh z + \sinh z$$

$$\cosh z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!}$$

$$\sinh z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Fourierova transformace

Fourierova transformace je integrální transformace sloužící k dekompozici funkce do jejich frekvenčních komponentů, tj. funkcí sin a cos, obecně tedy funkcí komplexní exponenciály. Často se používá k převedení signálu z časové oblasti (funkce času) do oblasti frekvenční (funkce frekvence).



Příkladem využití Fourierovy transformace je dekompozice zvukové vlny hudebního akordu na zvukovou intenzitu podél frekvence. Pomocí inverzní Fourierovy transformace lze provést opačnou operaci. Zvolením intenzit na různých frekvencích lze vytvořit reprezentaci akordu (nebo jakéhokoliv jiného zvuku), která se pak převede do zvukového signálu, který lze reprodukovat.

Fourierova transformace $S(\omega)$funkce $s(t)$ je definována integrálním vztahem

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \mathrm{d}t$$

$s(t)$ vypočteme z $S(\omega)$inverzní Fourierovou transformací

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \mathrm{d}\omega$$

To už je ale jiné téma.

Závěr

Předpokládám, že pokud si zájemce prolistuje tento článek, zopakuje si některé základní poučky, případně se dozví i něco nového. Ještě jednou upozorňuji, nejsou to skripta, spíše se publikace přibližuje studentskému záznamu z přednášek. Pro zájemce je uveden seznam literatury. V jednotlivých bakalářských pracích naleznete spoustu dalších odkazů.

Bibliografie

Bartch, H.-J. (1971). *Matematické vzorce.* Praha: SNTL Praha.

EUCLIDES. (nedatováno). *Elements [online].* Načteno z http://www.perseus.tufts.edu/hopper/text?doc=Perseus%3Atext%3A1999.01.0086%3Abook%3D2%3Atype%3DProp

Holubíková, P. (2016). *Goniometrické funkce - na co v přednášce z analýzy nezbývá čas.* Brno: PF MÚ, Bakalářská práce.

Chwiedziuk, O. (2021). *Goniometrie v antice.* Liberec: Gym F. X. Šaldy, SOČ.

Jarník, V. (1984). *Diferenciální počet I, II.* Praha: Academia.

Ježková, A. (2014). *Historie čísla e.* Olomouc: UP Olomouc, Bakalářská práce.

Koutný, F. (2013). *Leonhard Euler.* Zlín: Hvězdárna Zlín.

Kubešová, N. (2006). *Matematika - přehled středoškolského učiva.* Třebíč: Vydavatelství Petra Velenová.

Ligas, D. (2023). *Základní matematické konstanty, jejich historie a užití.* Olomouc: PedF ÚP Olomouc, Bakalářská práce.

Polák, J. (2015). *Přehled středoškolské matematiky.* Praha: Prometheus.

Rálková, L. (2017). *Eulerovo číslo.* České Budějovice: PedF JU, České Budějovice.

Rektorys, K. (1963). *Přehled užité matematiky.* Praha: SNTL Praha.

Rosecká, Z. (2019). *Geometrie 9 – učebnice.* Praha: Nová škola - DUHA s.r.o.. LUXOR.

Šimková, J. (2022). *Goniometrické funkce a jejich inverze.* Praha: PF UK, Bakalářská práce.

Vojáček, J. (2017). *Součtové vzorce pro goniometrické funkce a jejich aplikace.* Praha: MFF UK Praha, Bakalářská práce.

Odkazy

https://is.muni.cz/th/o4jlh/BP_Pavla_Holubikova_Archive.pdf

https://chwiedziuk.cz/assets/files/goniometrie-v-antice.pdf

https://theses.cz/id/9qlvst/11504164

https://www.zas.cz/prednasky/prednaska_koutny_euler.pdf

https://dspace.cuni.cz/bitstream/handle/20.500.11956/172558/130327858.pdf?sequence=1&isAllowed=y

http://eulerarchive.maa.org/

https://e-manuel.cz/kapitoly/mechanicke-vlneni/vyklad/zvuk/

.