Jednotkové rovnice

Pavel Hrubý

Úvod

Dlouho jsem váhal, jaký dát titulek tomuto článku. Nakonec jsem zvolil název Jednotkové rovnice, protože to nikomu nic neříká a jak se obecně tvrdí, název prodává.

Budeme se zabývat rovnicemi a odvozenými výrazy typu $x \pm \frac{1}{x} = \pm 1$, budou nás zajímat různé mocniny v těchto výrazech. Typickou úlohou je:

Nechť platí $x + \frac{1}{x} = 1$. Kolik je $x^{2025} - \frac{1}{x^{2025}} = ?$

V zadáních MO a různých algebraických cvičeních se vyskytují úlohy na určení hodnoty $x^n \pm \frac{1}{x^n}$ při zadání $x \pm \frac{1}{x} = K$. Problematiku lze rozšířit a hledat další souvislosti s jinými oblastmi matematiky.

Obsah

Předmluva

V první části se budu zabývat speciálními rovnicemi, které se vyskytují v rozmanitých úlohách např. v matematických olympiádách, testech, kvízech i jako součásti řešení složitějších matematických problémů. Jedná se o rovnice typu $x \pm \frac{1}{x} = \pm 1$. Vlastní řešení těchto rovnic je jistě jednoduché, ale nás budou zajímat výrazy, typu $A_n = x^n \pm \frac{1}{x^n}$, kde n je přirozené číslo, a jejich vyčíslení ve formě posloupností.

Speciálním číslem je číslo zlatého řezu, jemuž věnuji samostatnou kapitolu.

V další části se zabývám rovnicemi obecnějšími ve tvaru $x \pm \frac{1}{x} = K$, kde K je libovolné komplexní číslo a na nich založenými výrazy $A_n(K) = x^n \pm \frac{1}{x^n}$.

V poslední části jsem vybral z různých zdrojů příklady, které přímo (i nepřímo) souvisejí s touto problematikou.

Jednotkové rovnice

V této části se budu zabývat těmi nejjednoduššími výrazy, které jsem nazval jednotkové rovnice.

Inspirací pro tento název je souvislost s komplexní odmocninou z jedné. Když vezmeme např. výraz $x^3 - \frac{1}{x^3} = 0$, tak po úpravě dostaneme $x^6 = 1$, což je při řešení v komplexních číslech je komplexní šestá odmocnina z mínus jedné, tedy

$x = e^{i\frac{2\pi k}{6}} = e^{i\frac{\pi}{3}k}$, kde $k \in \{0,1,\dots,5\}$

Pojďme na to.

Definice

1. druhu A. $x^2 + x = 1$ a B. $x^2 + x = -1$
2. druhu C. $x^2 - x = 1$ a D $x^2 - x = -1$

Přehledně v různých tvarech zápisu

A	rovnice 1. druhu typ I.	$x + \frac{1}{x} = -1$	$x^2 + x + 1 = 0$	$x^2 = -x - 1$
B	rovnice 1. druhu typ II.	$x - \frac{1}{x} = -1$	$x^2 + x - 1 = 0$	$x^2 = -x + 1$
C	rovnice 2. druhu typ I.	$x + \frac{1}{x} = 1$	$x^2 - x + 1 = 0$	$x^2 = x - 1$
D	rovnice 2. druhu typ II.	$x - \frac{1}{x} = 1$	$x^2 - x - 1 = 0$	$x^2 = x + 1$

a raději ještě do jiné tabulky

	Typ I. (A,C)	Typ II. (B,D)
1. druh	$x + \frac{1}{x} = -1$	$x - \frac{1}{x} = -1$
2. druh	$x + \frac{1}{x} = 1$	$x - \frac{1}{x} = 1$

Jedná se o kvadratické rovnice, tak si raději spočteme jejich kořeny.

A	rovnice 1. druhu typ I.	$x^2+x+1=0$	$x_1=\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$	$x_2=\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$
B	rovnice 1. druhu typ II.	$x^2+x-1=0$	$x_1=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$	$x_2=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$
C	rovnice 2. druhu typ I.	$x^2-x+1=0$	$x_1=\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}$	$x_2=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$
D	rovnice 2. druhu typ II.	$x^2-x-1=0$	$x_1=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$	$x_2=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

Takže typ rovnic I. má komplexní kořeny.

A teď podrobněji.

Jednotkové rovnice prvního druhu

Rovnice A

$$\boldsymbol{x+\frac{1}{x}=-1}$$

$$x^2+x+1=0$$

$$x^2=-x-1$$

Řešení

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$$

$$x=\left\{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$$

Řešením je komplexní jednotka.

Poznámka

Navíc je možná zajímavý tento postup $x+\frac{1}{x}=-1$ *tedy* $x^2+x+1=0$

$$(x-1)(x^2+x+1)=x^3-1=0$$

$x^3=1$ *a řešíme pro* $x\neq 1.$

Pak tedy, pokud platí

$$x+\frac{1}{x}=-1$$

nás zajímají výrazy $S_n=x^n+\frac{1}{x^n}$ a $R_n=x^n-\frac{1}{x^n}$ kde n je přirozené číslo.

Pojďme si jich pár vypočítat.

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+2+\frac{1}{x^2}=1$$

$$x^2+\frac{1}{x^2}=-1$$

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^3=x^3+3\cdot 1\cdot\left(x+\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x^3}=x^3-3+\frac{1}{x^3}=-1$$

$$x^3+\frac{1}{x^3}=2$$

$$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2=x^4+2\cdot 1+\frac{1}{x^4}=1$$

$$x^4+\frac{1}{x^4}=-1$$

$$x^5+\frac{1}{x^5}=\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=x^5+\frac{1}{x^5}+x+\frac{1}{x}=x^5+\frac{1}{x^5}-1=2\cdot(-1)=-2$$

$$x^5 + \frac{1}{x^5} = -1$$

…

Odvoďme rekurentní vztah pro součet n-tých mocnin

$$\left(x^n + \frac{1}{x^n}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}} + x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}$$

$$-S_n = S_{n+1} + S_{n-1}$$

$$S_{n+1} = -S_n - S_{n-1}$$

Pro

$$S_1 = -1$$

$$S_2 = -1$$

Tedy pak je posloupnost pro $S_n = \{-1, -1, 2, -1 - , 1, 2, \ldots\}$

Dokažme si navíc

$$S_{n+3} = S_n$$

$$S_{n+3} = -(S_{n+2} + S_{n+1}) = -(-(S_{n+1} + S_n) + S_{n+1}) = -(-S_{n+1} - S_n + S_{n+1}) = S_n$$ 😛

A tedy pro n-tý člen

Pokud platí $x + \frac{1}{x} = -1$, pak

$x^n + \frac{1}{x^n} = 2$ pro $n = 3k$

$x^n + \frac{1}{x^n} = -1$ pro $n = 3k + 1$

$x^n + \frac{1}{x^n} = -1$ pro $n = 3k + 2$

kde k je libovolné celé číslo.

A nyní budeme zkoumat hodnotu výrazů $R_n = x^n - \frac{1}{x^n}$ stále za platnosti podmínky $x + \frac{1}{x} = -1$.

Z hodnot kořenů rovnice máme hned

$$x - \frac{1}{x} = i\sqrt{3}$$

$$x^2 - \frac{1}{x^2} = -i\sqrt{3}$$

neboť

$$x^2 - \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x - \frac{1}{x}\right) = -\left(x - \frac{1}{x}\right) = -i\sqrt{3}$$

$$\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 - 2 + \frac{1}{x^2} = -3$$

$x^3 - \frac{1}{x^3} = 0$ atd.

A rekurentní výraz

$\left(x^n - \frac{1}{x^n}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^{n+1} - \frac{1}{x^{n+1}} + x^{n-1} - \frac{1}{x^{n-1}}$

$-R_n = R_{n+1} + R_{n-1}$

$R_{n+1} = -R_n - R_{n-1}$

Kde

$R_1 = i\sqrt{3}$

$R_2 = -i\sqrt{3}$

Pak posloupnost

$R_n = \{i\sqrt{3}, -i\sqrt{3}, 0, i\sqrt{3}, -i\sqrt{3}, \ldots\}$

Takže pro n-tý člen platí:

Pokud platí $x + \frac{1}{x} = -1$, pak

$x^n - \frac{1}{x^n} = 0$ pro $n = 3k$

$x^n - \frac{1}{x^n} = i\sqrt{3}$ pro $n = 3k + 1$

$x^n - \frac{1}{x^n} = -i\sqrt{3}$ pro $n = 3k + 2$

Rovnice B

$$\boldsymbol{x - \frac{1}{x} = -1}$$

$x^2 + x - 1 = 0$

Tedy také $x - \frac{1}{x} = -1$ nebo $x^2 = 1 - x$

Řešením rovnice jsou čísla v reálném oboru

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

a platí

$$\frac{1}{x} = \frac{2}{-1 \pm \sqrt{5}} = \frac{2\left(-1 \mp \sqrt{5}\right)}{\left(-1 \pm \sqrt{5}\right)\left(-1 \mp \sqrt{5}\right)} = \frac{2\left(-1 \mp \sqrt{5}\right)}{-4} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} = -\left(\frac{-1 \mp \sqrt{5}}{2}\right)$$

Neboli

$$\frac{1}{x_1} = -x_2$$

a tedy (lze přímo z Vietových vzorců)

$x_1 x_2 = -1$

$x_1 + x_2 = -1$

a rozdíl

$x_1 - x_2 = \pm\sqrt{5}$

Pro reciproký součet pak nám vycházejí dvě možnosti

$$x_1 + \frac{1}{x_1} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} + \frac{2}{-1+\sqrt{5}} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} + \frac{2(\sqrt{5}+1)}{4} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} + \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \sqrt{5}$$

$$x_2 + \frac{1}{x_2} = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} + \frac{2}{-1-\sqrt{5}} = -\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{2(\sqrt{5}-1)}{4} = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} - \frac{\sqrt{5}-1}{2} = -\sqrt{5}$$

Poněvadž

$$\boldsymbol{x - \frac{1}{x} = -1}$$

Takže máme dvojí řešení $x + \frac{1}{x} = \pm\sqrt{5}$

pak také pro vyšší mocniny platí

$$\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 - 2 + \frac{1}{x^2} = 1$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = 3$$

$$\left(\sqrt{5}\right)^3 = 5\sqrt{5} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 = x^3 + \frac{1}{x^3} + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^3 + \frac{1}{x^3} + 3\sqrt{5}$$

$$\left(-\sqrt{5}\right)^3 = -5\sqrt{5} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 = x^3 + \frac{1}{x^3} + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^3 + \frac{1}{x^3} - 3\sqrt{5}$$

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = \pm 2\sqrt{5}$$

$$\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right)\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = x^5 + \frac{1}{x^5} + x + \frac{1}{x} = x^5 + \frac{1}{x^5} + \sqrt{5} = \left(\pm 2\sqrt{5}\right) \cdot 3 = \pm 6\sqrt{5}$$

$$x^4 + \frac{1}{x^4} = 7$$

$$x^5 + \frac{1}{x^5} = \pm 5\sqrt{5}$$

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^3 = x^6 + \frac{1}{x^6} + 3\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = x^6 + \frac{1}{x^6} + 9 = 27$$

$$x^6 + \frac{1}{x^6} = 18$$

$$\left(x^5 + \frac{1}{x^5}\right)\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = x^7 + \frac{1}{x^7} + x^3 + \frac{1}{x^3} = x^7 + \frac{1}{x^7} \pm 2\sqrt{5} = \left(\pm 5\sqrt{5}\right) \cdot 3 = \pm 15\sqrt{5}$$

$$x^7 + \frac{1}{x^7} = \pm 13\sqrt{5}$$

$$x^8 + \frac{1}{x^8} = 47$$

$$\left(x^7+\frac{1}{x^7}\right)\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=x^9+\frac{1}{x^9}+x^5+\frac{1}{x^5}=x^9+\frac{1}{x^9}+5\sqrt{5}=\left(13\sqrt{5}\right)\cdot 3=39\sqrt{5}$$

$x^9+\frac{1}{x^9}=\pm 34\sqrt{5}$

$$\left(x^8+\frac{1}{x^8}\right)\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=x^{10}+\frac{1}{x^{10}}+x^6+\frac{1}{x^6}=x^{10}+\frac{1}{x^{10}}+18=47\cdot 3$$

$x^{10}+\frac{1}{x^{10}}=123$

$$\left(x^9+\frac{1}{x^9}\right)\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=x^{11}+\frac{1}{x^{11}}+x^7+\frac{1}{x^7}=x^{11}+\frac{1}{x^{11}}+13\sqrt{5}=34\sqrt{5}\cdot 3=102\sqrt{5}$$

$x^{11}+\frac{1}{x^{11}}=\pm 89\sqrt{5}$

$$\left(x^{10}+\frac{1}{x^{10}}\right)\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=x^{12}+\frac{1}{x^{12}}+x^8+\frac{1}{x^8}=x^{12}+\frac{1}{x^{12}}+47=123\cdot 3$$

$x^{12}+\frac{1}{x^{12}}=322$

$$\left(x^{11}+\frac{1}{x^{11}}\right)\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=x^{13}+\frac{1}{x^{13}}+x^9+\frac{1}{x^9}=x^{13}+\frac{1}{x^{13}}+34\sqrt{5}=3\cdot 89\sqrt{5}$$

$x^{13}+\frac{1}{x^{13}}=\pm 233\sqrt{2}$

atd.

Pokud označíme $S_n=x^n+\frac{1}{x^n}$

A rekurentní výraz pro součty (platí $x-\frac{1}{x}=-1$)

$x+\frac{1}{x}=\pm\sqrt{5}$

$\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^{n+1}+\frac{1}{x^{n+1}}+x^{n-1}+\frac{1}{x^{n-1}}$

$S_{n+1}=\pm\sqrt{5}S_n-S_{n-1}$

Kde

$S_1=\pm\sqrt{5}$

$S_2=3$

Pak

$S_n=\left\{\pm\sqrt{5},3,\pm 2\sqrt{5},7,\pm 5\sqrt{5},18,\pm 13\sqrt{5},\dots\right\}$

Máme pro sudé mocniny

n	2	4	6	8	10	12
S_n	3	7	18	47	123	322

Pro liché mocniny

n	1	3	5	7	9	11	13
S_n	$\pm\sqrt{5}$	$\pm 2\sqrt{5}$	$\pm 5\sqrt{5}$	$\pm 13\sqrt{5}$	$\pm 34\sqrt{5}$	$\pm 89\sqrt{5}$	$\pm 233\sqrt{5}$

Výsledná posloupnost

$S_n = \{\pm\sqrt{5}, \mathbf{3}, \pm 2\sqrt{5}, \mathbf{7}, \pm 5\sqrt{5}, \mathbf{18}, \pm 13\sqrt{5}, \mathbf{47}, \pm 34\sqrt{5}, \mathbf{123}, \pm 89\sqrt{5}, \mathbf{322}, \pm 178\sqrt{5}, \ldots\}$

je tedy složena ze dvou posloupností (když vynecháme znaménka plus, mínus).

Posloupnost pro sudé mocniny 3, 7, 18, 47,… je bisekvence v Lucasově posloupnosti, která je v OEIS uvedena pod číslem A005248.

Lucasova posloupnost je 2, 1, **3**, 4, **7**, 11, **18**, 29, **47**, 76, **123**, 199, **322**, 521, **843**, 1364, …. Tučně vyznačená čísla tvoří naši posloupnost sudých mocnin K_n.

Generování této posloupnosti je L(2n), tj. 2*3+1=7, 2*7+4=18, 2*18+11=47, 2*47+29=123, …

$K_n = 2K_{n-1} + L_{n-2}$ pro n>=2, s tím, že $L_0 = 2, L_1 = 1$. **K** je naše posloupnost, **L** Lucasova.

Posloupnost pro lichá čísla, která obsahuje odmocniny z 5 (po vynechání odmocnin) je tvořena čísly 1, 2, 5, 13, 34, 89, 233,… . To je bisekvence Fibonacciho (OEIS A000045)posloupnosti 1, 1, **2**, 3, **5**, 8, **13**, 21, **34**, 55, **89**, 144, **233**, 377, **610**, … kde opět tučně je vyznačena naše posloupnost. Tato posloupnost je v OEIS uvedena pod číslem A001519. Generování této posloupnosti je

$K_n = 3K_{n-1} - K_{n-2}$ pro n >= 2, s tím, že $K_0 = K_1 = 1$.

Podívejme se ještě na rozdíly mocnin.

(stále platí $x - \frac{1}{x} = -1$)

Víme, že $x + \frac{1}{x} = \pm\sqrt{5}$

Zvolme $x + \frac{1}{x} = -\sqrt{5}$

$$x^2 - \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x - \frac{1}{x}\right) = \sqrt{5}$$

$$-1 = \left(x - \frac{1}{x}\right)^3 = x^3 - 3x^2\frac{1}{x} + 3x\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} = x^3 - \frac{1}{x^3} - 3x + 3\frac{1}{x} = x^3 - \frac{1}{x^3} - 3\left(x - \frac{1}{x}\right)$$
$$= x^3 - \frac{1}{x^3} + 3$$

a tedy

$$x^3 - \frac{1}{x^3} = -4$$

$$x^4 - \frac{1}{x^4} = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right) = 3\sqrt{5}$$

$$-7 = \left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right)\left(x - \frac{1}{x}\right) = x^5 + \frac{1}{x^3} - x^3 - \frac{1}{x^5} = x^5 - \frac{1}{x^5} + 4$$

$$x^5 - \frac{1}{x^5} = -11$$

Pokud označíme $R_n = x^n - \frac{1}{x^n}$ a vezmeme $x + \frac{1}{x} = \pm\sqrt{5}$

$$\left(x^n - \frac{1}{x^n}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^{n+1} - \frac{1}{x^{n+1}} + x^{n-1} - \frac{1}{x^{n-1}} = \pm\sqrt{5}\left(x^n - \frac{1}{x^n}\right)$$

$R_{n+1} + R_{n-1} = \pm\sqrt{5}\, R_n$

z toho

$R_{n+1} = \pm\sqrt{5}\, R_n - R_{n-1}$ pro $R_1 = -1$ a $R_2 = \pm\sqrt{5}$

Pro sudé mocniny máme

n	2	4	6	8	10	12
R_n	$\pm\sqrt{5}$	$\pm 3\sqrt{5}$	$\pm 8\sqrt{5}$	$\pm 21\sqrt{5}$	$\pm 55\sqrt{5}$	…

Pro liché mocniny

n	1	3	5	7	9	11
R_n	-1	-4	-11	-29	-76	…

Výsledná posloupnost

$\boldsymbol{R_n} = \{\mathbf{-1}, \pm\sqrt{5}, \mathbf{-4}, \pm 3\sqrt{5}, \mathbf{-11}, \pm\, 8\sqrt{5}, \mathbf{-29}, \pm 21\sqrt{5}, \mathbf{-76}, \pm 55\sqrt{5}, \dots\}$

je tedy složena ze dvou posloupností (ignorujeme znaménka).

Podobně jako v předcházejícím případě je

Lucasova posloupnost je 2, **1**, 3, **4**, 7, **11**, 18, **29**, 47, **76**, 123, **199**, 322, **521**, 843, **1364**, …. Tučně vyznačená čísla tvoří naši posloupnost lichých mocnin L_n.

Generování této posloupnosti je L(2n), tj. 2*3+1=7, 2*7+4=18, 2*18+11=47, 2*47+29=123, …

$K_n = 2K_{n-1} + L_{n-2}$ pro n>=2, s tím, že $L_0 = 2, L_1 = 1$. K je naše posloupnost, L Lucasova.

Posloupnost pro sudá čísla, která obsahuje odmocniny z 5 (po vynechání odmocnin a znaménka) je tvořena čísly 1, 3, 8, 21, 55, 144, 377,… . To je bisekvence Fibonacciho (OEIS A000045)posloupnosti 1, **1**, 2, **3**, 5, **8**, 13, **21**, 34, **55**, 89, **144**, 233, **377**, 610, … kde opět tučně je vyznačena naše posloupnost.

Jednotkové rovnice druhého druhu

Rovnice C

$$\boldsymbol{x+\frac{1}{x}=1}$$

$$x^2-x+1=0$$

$$x+\frac{1}{x}=1$$

$$x=\left\{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$$

$$(x+1)(x^2-x+1)=x^3+1=0$$

$$x^3=-1$$

$$x^2+\frac{1}{x^2}=-1$$

$$x^3+\frac{1}{x^3}=-2$$

Rekursivně:

Pro součet odvodíme:

$S_n=x^n+\frac{1}{x^n}$

$$\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^{n+1}+\frac{1}{x^{n+1}}+x^{n-1}+\frac{1}{x^{n-1}}=1\cdot\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)$$

$S_{n+1}=S_n-S_{n-1}$, kde $S_1=1$ a $S_2=-1$

Tedy

$S_n=\{1,-1,-2,-1,1,2,1,\dots\}$

a pro rozdíl:

označme $R_n=x^n-\frac{1}{x^n}$

$$x-\frac{1}{x}=\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}-\frac{2}{1\pm i\sqrt{3}}=\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}+\frac{2\left(1\mp i\sqrt{3}\right)}{4}=\pm i\sqrt{3}$$

$$\left(x^n-\frac{1}{x^n}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^{n+1}-\frac{1}{x^{n+1}}+x^{n-1}-\frac{1}{x^{n-1}}=1\cdot\left(x^n-\frac{1}{x^n}\right)$$

$R_{n+1}=R_n-R_{n-1}$, kde $R_1=\pm i\sqrt{3}$ a $R_2=\pm i\sqrt{3}$

Tedy

$R_n=\left\{i\sqrt{3},i\sqrt{3},0,-i\sqrt{3},-i\sqrt{3},0,\dots\right\}$

Nebo s prohozenými znaménky

$R_n=\left\{-i\sqrt{3},-i\sqrt{3},0,i\sqrt{3},i\sqrt{3},0,\dots\right\}$

A tedy obecně pro n-tý člen součtu

Nechť platí $x + \frac{1}{x} = 1$

Pak

$x^n + \frac{1}{x^n} = 2$ pro $n = 6k$

$x^n + \frac{1}{x^n} = 1$ pro $n = 6k \pm 1$

$x^n + \frac{1}{x^n} = -1$ pro $n = 6k \pm 2$

$x^n + \frac{1}{x^n} = -2$ pro $n = 6k + 3$

Rovnice D

$$\boldsymbol{x - \frac{1}{x} = 1}$$

$$x^2 - x - 1 = 0$$

$$x^2 = x + 1$$

Řešení rovnice

$$x = \left\{\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right\}$$

(kladné řešení je číslo Zlatého řezu, viz dále)

Takže

$$x + \frac{1}{x} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{2(\sqrt{5}-1)}{4} = \sqrt{5}$$

$$x + \frac{1}{x} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} + \frac{2}{1-\sqrt{5}} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} + \frac{2(\sqrt{5}+1)}{-4} = -\sqrt{5}$$

$$x + \frac{1}{x} = \pm\sqrt{5}$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = 5$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = 3$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 = x^3 + \frac{1}{x^3} + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^3 + \frac{1}{x^3} \pm 3\sqrt{5} = \pm 5\sqrt{5}$$

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = \pm 2\sqrt{5}$$

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^4 = x^4 + \frac{1}{x^4} + 4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 6 = x^4 + \frac{1}{x^4} + 12 + 6 = 25$

$$x^4 + \frac{1}{x^4} = 7$$

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^5 = \left(x+\frac{1}{x}\right)^4 \cdot \left(x+\frac{1}{x}\right) = x^5 + \frac{1}{x^5} + x^3 + \frac{1}{x^3} = x^5 + \frac{1}{x^5} \pm 2\sqrt{5} = \pm 7\sqrt{5}$$

$$x^5 + \frac{1}{x^5} = \pm 5\sqrt{5}$$

A pro rozdíly

Platí $x - \frac{1}{x} = 1$

$$x^2 - \frac{1}{x^2} = \left(x-\frac{1}{x}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right) = \pm\sqrt{5}$$

$$\left(x-\frac{1}{x}\right)^3 = x^3 - \frac{1}{x^3} - 3\left(x-\frac{1}{x}\right) = x^3 + \frac{1}{x^3} - 3 = 1$$

$$x^3 - \frac{1}{x^3} = 4$$

$$x^4 - \frac{1}{x^4} = \left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right) = 3\sqrt{5}$$

…

Pro součty označme $S_n = x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}}$ a máme $x + \frac{1}{x} = \pm\sqrt{5}$

$$\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right) = x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}} + x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}} = \pm\sqrt{5}\cdot\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)$$

$S_{n+1} = \pm\sqrt{5}S_n - S_{n-1}$, kde $S_1 = \pm\sqrt{5}$ a $S_2 = 3$

Tedy

$$S_n = \{\pm\sqrt{5}, 3, \pm 2\sqrt{5}, 7, \pm 5\sqrt{5}, 18, \pm 13\sqrt{5}, \dots\}$$

Podobně jako v předcházejícím případě je

Lucasova posloupnost je 2, 1, **3**, 4, **7**, 11, **18**, 29, **47**, 76, **123**, 199, **322**, 521, **843**, 1364, …. Tučně vyznačená čísla tvoří naši posloupnost sudých mocnin S_n.

Posloupnost pro liché mocniny, která obsahuje odmocniny z 5 (po vynechání odmocnin a znaménka) je tvořena čísly 1, 3, 8, 21, 55, 144, 377,… . To je bisekvence Fibonacciho (OEIS A000045)posloupnosti **1**, 1, **2**, 3, **5**, 8, **13**, 21, **34**, 55, **89**, 144, **233**, 377, **610**, … kde opět tučně je vyznačena naše posloupnost.

Pro rozdíly označme $R_n = x^n - \frac{1}{x^n}$, stále platí předpoklad $x - \frac{1}{x} = 1$ a tedy $x + \frac{1}{x} = \sqrt{5}$

$$\left(x^n-\frac{1}{x^n}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right) = x^{n+1} - \frac{1}{x^{n+1}} + x^{n-1} - \frac{1}{x^{n-1}} = \left(x^{n+1}-\frac{1}{x^{n+1}}\right) + \left(x^{n-1}-\frac{1}{x^{n-1}}\right)$$
$$= \pm\sqrt{5}\left(x^n - \frac{1}{x^n}\right)$$

$R_{n+1} = \pm\sqrt{5}R_n - R_{n-1}$ pro $R_1 = 1, R_2 = \pm\sqrt{5}$

Tedy

$$R_n = \{1, \pm\sqrt{5},\ 4,\ \pm 3\sqrt{5},\ 11, \pm\, 8\sqrt{5}, 29 \dots\}$$

Podobně jako v předcházejícím případě je

Lucasova posloupnost je 2, **1**, 3, **4**, 7, **11**, 18, **29**, 47, **76**, 123, **199**, 322, **521**, 843, **1364**, …. Tučně vyznačená čísla tvoří naši posloupnost lichých mocnin L_n.

Posloupnost pro sudá čísla, která obsahuje odmocniny z 5 (po vynechání odmocnin a znaménka) je tvořena čísly 1, 3, 8, 21, 55, 144, 377,… . To je bisekvence Fibonacciho (OEIS A000045)posloupnosti 1, **1**, 2, **3**, 5, **8**, 13, **21**, 34, **55**, 89, **144**, 233, **377**, 610, … kde opět tučně je vyznačena naše posloupnost.

Přehled

Rekurentní vyjádření

		Když platí, pak	$S_n = x^n + \frac{1}{x^n}$	$R_n = x^n - \frac{1}{x^n}$
A	rovnice 1. druhu typ I.	$x + \frac{1}{x} = -1$	$S_{n+1} = -S_n - S_{n-1}$ $S_1 = -1, S_2 = 2$	$R_{n+1} = -R_n - R_{n-1}$ $R_1 = i\sqrt{3}, R_2 = -i\sqrt{3}$
	rovnice 1. druhu typ II.	$x - \frac{1}{x} = -1$	$S_{n+1} = \pm\sqrt{5}S_n - S_{n-1}$ $S_1 = \pm\sqrt{5}, S_2 = 3$	$R_{n+1} = \pm\sqrt{5}\,R_n - R_{n-1}$ $R_1 = -1$ a $R_2 = \pm\sqrt{5}$
C	rovnice 2. druhu typ I.	$x + \frac{1}{x} = 1$	$S_{n+1} = S_n - S_{n-1}$ $S_1 = 1$ a $S_2 = -2$	$R_{n+1} = R_n - R_{n-1}$ $R_1 = \pm i\sqrt{3}$ a $R_2 = \pm i\sqrt{3}$
D	rovnice 2. druhu typ II.	$x - \frac{1}{x} = 1$	$S_{n+1} = \pm\sqrt{5}S_n - S_{n-1}$ $S_1 = \pm\sqrt{5}$ a $S_2 = 3$	$R_{n+1} = \pm\sqrt{5}R_n - R_{n-1}$ $R_1 = 1$ a $R_2 = \pm\sqrt{5}$

Posloupnosti

		Když platí, pak	Pro $x^n + \frac{1}{x^n} =$	Pro $x^n - \frac{1}{x^n} =$
A	rovnice 1. druhu typ I.	$x + \frac{1}{x} = -1$	$-1, -1, 2, -1, -1, 2, \dots$ tj. 2 pro $n = 3k$ -1 pro $n = 3k + 1$ -1 pro $n = 3k + 2$	$i\sqrt{3}, -i\sqrt{3}, 0, i\sqrt{3}, -i\sqrt{3}, \dots$ tj. 0 pro $n = 3k$ $i\sqrt{3}$ pro $n = 3k + 1$ $-i\sqrt{3}$ pro $n = 3k + 2$
B	rovnice 1. druhu typ II.	$x - \frac{1}{x} = -1$	$\pm\sqrt{5}, 3, \pm\, 2\sqrt{5}, 7, \pm 5\sqrt{5}, 18, \dots$	$-\mathbf{1}, \pm\sqrt{5}, -\mathbf{4}, \pm 3\sqrt{5}, -\mathbf{11}, \pm 8\sqrt{5}, \dots$
C	rovnice 2. druhu typ I.	$x + \frac{1}{x} = 1$	1,-1, -2, -1, 1, 2, 1, -1, … tj. 2 pro $n = 6k$ 1 pro $n = 6k \pm 1$ -1 pro $n = 6k \pm 2$ -2 pro $n = 6k + 3$	$\pm i\sqrt{3}, \pm\, i\sqrt{3}, 0, \mp\, i\sqrt{3}, \mp i\sqrt{3}, 0, \dots$ tj. 0 pro $n = 3k$ $\pm i\sqrt{3}$ pro $n = 3k + 1$ $\pm i\sqrt{3}$ pro $n = 3k + 2$

D	rovnice 2. druhu typ II.	$x - \frac{1}{x} = 1$	$\pm\sqrt{5}, 3, \pm 2\sqrt{5}, 7, \pm 5\sqrt{5}, 18, \ldots$	$\mathbf{1}, \pm\sqrt{5}, \mathbf{4}, \pm 3\sqrt{5}, \mathbf{11}, \pm 8\sqrt{5}, \mathbf{29} \ldots$

Pozn. Pro n = 1,2,3,…

U rovnic II. typu B a D můžeme naše posloupnosti porovnat s Fibonacciho a Lucasovou posloupností.

Fibonacci: 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, …

Lucas: 2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, 322, 521, …

Číslo zlatého řezu

Při řešení rovnice

$$x - \frac{1}{x} = 1$$

(což je rovnice 2. druhu typ II.)

Dostaneme řešení

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Označme kladné řešení jako číslo

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Toto je číslo, které se nazývá číslem Zlatého řezu.

Podle dřívějších výsledků máme rekurentní vyjádření a částečný výčet pro

$S_n = \varphi^n + \frac{1}{\varphi^n}$	$R_n = \varphi^n - \frac{1}{\varphi^n}$
$S_{n+1} = \sqrt{5} S_n - S_{n-1}$ $S_1 = \sqrt{5}$ a $S_2 = 3$	$R_{n+1} = \sqrt{5} R_n - R_{n-1}$ $R_1 = 1$ a $R_2 = \sqrt{5}$
$\sqrt{5}, \mathbf{3}, 2\sqrt{5}, \mathbf{7}, 5\sqrt{5}, \mathbf{18}, 13\sqrt{5}, \ldots$	$\mathbf{1}, \sqrt{5}, \mathbf{4}, 3\sqrt{5}, \mathbf{11}, 8\sqrt{5}, \mathbf{29} \ldots$

(kombinace Fibonacciho a Lucasovy posloupnosti s $\sqrt{5}$)

Dále platí

$$\varphi^2 = \varphi + 1$$

$$\varphi^3 = \varphi^2 \cdot \varphi = (\varphi + 1)\varphi = \varphi^2 + \varphi = \varphi + 1 + \varphi = 2\varphi + 1$$

$$\varphi^4 = \varphi^3 \cdot \varphi = (2\varphi + 1)\varphi = 2\varphi^2 + \varphi = 2(\varphi + 1) + \varphi = 3\varphi + 2$$

$$\varphi^5 = \varphi^4 \cdot \varphi = (3\varphi + 2)\varphi = 3\varphi^2 + 2\varphi = 3(\varphi + 1) + 2\varphi = 5\varphi + 3$$

$$\varphi^6 = \varphi^5 \cdot \varphi = (5\varphi + 3)\varphi = 5\varphi^2 + 3\varphi = 5(\varphi + 1) + 3\varphi = 8\varphi + 5$$

$$\varphi^7 = \varphi^6 \cdot \varphi = (8\varphi + 5)\varphi = 8\varphi^2 + 5\varphi = 8(\varphi + 1) + 5\varphi = 13\varphi + 8$$

…

Tvrzení o rekurenci mocniny fí

Pro n+1 mocninu čísla φ platí rekurentní vztah

$$\varphi^{n+1} = \varphi^n + \varphi^{n-1}$$

Důkaz:

$$\varphi^{n+1} = \varphi^{n-1} \cdot \varphi^2 = \varphi^{n-1}(\varphi + 1) = \varphi^n + \varphi^{n-1}$$

□

Tvrzení o fí a Fibonacciho posloupnosti

Pro n-tou mocninu platí ($n \geq 1$):

$$\varphi^n = f_n\varphi + f_{n-1}$$

kde f_k je k-tý člen Fibonacciho posloupnosti 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, …

Pro Fibonacciho posloupnost platí definiční rekurentní vztah

$$f_0 = 0$$

$$f_1 = 1$$

$$f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$$

(indexujeme od nuly $f_0 = 0$)

Důkaz indukcí:

Pro n=1

$$\varphi^1 = f_1\varphi + f_0 = 1\varphi + 0 = \varphi$$

Pro n=2

$$\varphi^2 = f_2\varphi + f_1 = 1\varphi + 1 = \varphi + 1$$

Nechť

$$\varphi^n = f_n\varphi + f_{n-1}$$

pak

$$\begin{aligned}\varphi^{n+1} = f_{n+1}\varphi + f_n = \varphi \cdot \varphi^n = \varphi(f_n\varphi + f_{n-1}) = f_n\varphi^2 + f_{n-1}\varphi = f_n(\varphi + 1) + f_{n-1}\varphi \\ = \varphi(f_n + f_{n-1}) + f_n = f_{n+1}\varphi + f_n\end{aligned}$$

□

A také existuje vztah pro n-tý člen Fibonacciho posloupnosti, tkzv. Binetův vzorec

$f_n = \frac{\varphi^n - \delta^n}{\varphi - \delta}$, kde $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\delta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

nebo

$$f_n = \frac{\varphi^n - \left(-\frac{1}{\varphi}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

a tedy po úpravě

$f_n = \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}} - \frac{(1-\varphi)^n}{\sqrt{5}} = \frac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{2^n\sqrt{5}}$

Existují i další zajímavé vztahy

$f_{n+2} - 1 = f_1 + f_2 + \cdots + f_n$

Cassiniho identita

$f_{n-1} \cdot f_{n+1} - f_n^2 = (-1)^n$

nebo také

$\sum_{i=1}^{n} f_i^2 = f_n \cdot f_{n+1}$

Z definice platí $\frac{1}{\varphi} = \varphi - 1$ a také při použití binomické věty lze zapsat

$$\frac{1}{\varphi^n} = (\varphi - 1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \varphi^k (-1)^{n-k}$$

Pak také

$\frac{1}{\varphi^n} = \left(\frac{1}{\varphi}\right)^n = \left(\frac{2}{1+\sqrt{5}}\right)^n = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{5-1} \cdot 2\right)^n = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n$

Pro $S_n = \varphi^n + \frac{1}{\varphi^n}$ pak platí

$S_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n = \frac{(1+\sqrt{5})^n + (\sqrt{5}-1)^n}{2^n}$

a pro $R_n = \varphi^n - \frac{1}{\varphi^n}$

$R_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n = \frac{(1+\sqrt{5})^n - (\sqrt{5}-1)^n}{2^n}$

Ilustrace pro n=4

$S_4 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^4 + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}\left[(1+\sqrt{5})^4 + (-1+\sqrt{5})^4\right] =$

$= \frac{1}{16}[1 + 4\sqrt{5} + 6 \cdot 5 + 4 \cdot 5\sqrt{5} + 25 + 1 - 4\sqrt{5} + 6 \cdot 5 - 4 \cdot 5\sqrt{5} + 25] =$

$= \frac{1}{16}[1 + 6 \cdot 5 + 25 + 1 + 6 \cdot 5 + 25] = \frac{112}{16} = 7$

K-rovnice

Zkusme si zobecnění původních jednotkových rovnic s tím, že místo jedničky dáme na pravou stranu libovolnou komplexní konstantu K. Výrazy typu $x^n \pm \frac{1}{x^n}$ se vyskytují při řešení reciprokých rovnic po provedení substituce $y = x \pm \frac{1}{x}$.

Tedy:

Součet x a 1/x

Definice

$x + \frac{1}{x} = K$

$S_n = x^n + \frac{1}{x^n}$

$R_n = x^n - \frac{1}{x^n}$

Rozbor

Zápis $x + \frac{1}{x} = K$ lze upravit na $x^2 - Kx + 1 = 0$, řešením je

$x_{1,2} = \frac{K \pm \sqrt{K^2-4}}{2}$

Pro $|K| < 2$ je řešením komplexní číslo.

Pro $K = 2$ pak $x = \frac{K}{2} = 1$ a $S_n = 2$ pro libovolné n.

Pro součty mocnin S_n lze odvodit rekurentní vztah

$$S_n \cdot K = \left(x^n + \frac{1}{x^n}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}} + x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}} = S_{n+1} + S_{n-1}$$

$S_{n+1} = KS_n - S_{n-1}$

$S_0 = 2$

$S_1 = K$

Pak máme polynomy:

$S_2 = K^2 - 2$

$S_3 = K^3 - 2K - K = K^3 - 3K$

$S_4 = K^4 - 3K^2 - K^2 + 2 = K^4 - 4K^2 + 2$

$S_5 = K^5 - 4K^3 + 2K - K^3 + 3K = K^5 - 5K^3 + 5K$

$S_6 = K^6 - 5K^4 + 5K^2 - K^4 + 4K^2 - 2 = K^6 - 6K^4 + 9K^2 - 2$

$S_7 = K^7 - 6K^5 + 9K^3 - 2K - K^5 + 3K^3 - 5K = K^7 - 7K^5 + 12K^3 - 7K$

…

Seřaďme si koeficienty u mocnin K do tabulky podle exponentů

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	2											
1	0	1										
2	-2	0	1									
3	0	-3	0	1			+8					
4	2	0	-4	0	1							
5	0	5	0	-5	0	1						
6	-2	0	9	0	-6	0	1					
7	0	-7	0	14	0	-7	0	1				
8	2	0	-16	0	20	0	-8	0	1			
9	0	9	0	-30	0	27	0	-9	0	1		
10	*-2*	*0*	*9+16*	*0*	*-30-20*	*0*	*27+8*	*0*	*-9-1*	*0*	*1*	
10	-2	0	25	0	-50	0	35	0	-10	0	1	
11	0	-11	0	-5	0	-77	0	44	0	-11	0	1

Tabulku lze rychle generovat na základě rekursivního předpisu – každý další řádek vytvoříme tak, že předchozí řádek posunem o jednu pozici doprava a odečteme řádek o jednu pozici menší (viz 10 řádek).

Kde pro lichá čísla obsahuje polynom pouze liché mocniny K pro sudá čísla obsahuje polynom jen sudé mocniny K.

Kontrola správnosti odvození polynomu s K je jednoduchá. Po dosazení za K=2 musí vždy být výsledkem 2. Pokud za K dosadíme 1, dostáváme rovnici typu C, která může nabývat pouze hodnot -1, 1,2 a -2.

Zajímavé jsou i posloupnosti koeficientů u rostoucích stupňů polynomů S_n.

Označme $S_n = z^n + a_{n-2}z^{n-2} + a_{n-4}z^{n-4} + \cdots + a_1 z + a_0$

U vedoucího členu S_n s exponentem n je koeficient vždy 1. Další člen má exponent o 2 menší a koeficienty jsou čísla $a_{n-2} = -n$.

Koeficienty u členu s exponentem n-4 vytvářejí posloupnost 2,5,9,14,20,27,… což je posloupnost OEIS A000096 a $p_k = \frac{k(k+3)}{2}$. Pro S_n pak $a_{n-4} = \frac{n(n-3)}{2}$.

Koeficienty u členu s exponentem n-6 vytvářejí posloupnost -2,-7,-16,-30,-50.-77,… - OEIS A005581.

atd.

Rozdíl x a 1/x

A zkusme analyzovat výrazy $R_n = x^n - \frac{1}{x^n}$ pro rozdíly mocnin, při platnosti $x + \frac{1}{x} = K$

Rekurentně lze odvodit

$$R_n \cdot K = \left(x^n - \frac{1}{x^n}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^{n+1} - \frac{1}{x^{n+1}} + x^{n-1} - \frac{1}{x^{n-1}} = R_{n+1} + R_{n-1}$$

$$R_{n+1} = KR_n - R_{n-1}$$

Kde

$$R_0 = 0$$

$$R_1 = x - \frac{1}{x} = \sqrt{K^2 - 4}$$

$$R_2 = x^2 - \frac{1}{x^2} = K \cdot \sqrt{K^2 - 4}$$

$$R_3 = x^3 - \frac{1}{x^3} = K^2 \cdot \sqrt{K^2 - 4} - \sqrt{K^2 - 4} = (K^2 - 1)\sqrt{K^2 - 4}$$

$$R_4 = x^4 - \frac{1}{x^4} = K(K^2 - 1)\sqrt{K^2 - 4} - K \cdot \sqrt{K^2 - 4} = (K^3 - 2K) \cdot \sqrt{K^2 - 4}$$

$$R_5 = x^5 - \frac{1}{x^5} = K \cdot K \cdot \sqrt{K^2 - 4}(K^2 - 2) - (K^2 - 1)\sqrt{K^2 - 4} = (K^4 - 3K^2 + 1)\sqrt{K^2 - 4}$$

…

Rekurentní předpis je stejný jako pro S_n jen s jinými výchozími členy R_1 a R_2.

Dále platí pro $x + \frac{1}{x} = K$ vztah pro n-tý člen

$$S_n(K) = x^n + \frac{1}{x^n} = \left(\frac{K + \sqrt{K^2 - 4}}{2}\right)^n + \left(\frac{K - \sqrt{K^2 - 4}}{2}\right)^n$$

$R_n(K) = x^n - \frac{1}{x^n} = \left(\frac{K+\sqrt{K^2-4}}{2}\right)^n - \left(\frac{K-\sqrt{K^2-4}}{2}\right)^n$

L-rovnice

A zkusíme ještě obdobně při platnosti vztahu $x - \frac{1}{x} = L$ určit opět součty a rozdíly mocnin

$S_n = x^n + \frac{1}{x^n}$ a $R_n = x^n - \frac{1}{x^n}$

Vztah $x - \frac{1}{x} = L$ lze upravit na $x^2 - Lx - 1 = 0$ a řešení rovnice je

$x_{1,2} = \frac{L \pm \sqrt{L^2+4}}{2}$

Tedy řešení jsou v případě L reálného čísla, čísla reálná.

Rekurentně

Budeme potřebovat pro $x - \frac{1}{x} = L$ určit

$S_1 = x + \frac{1}{x} = \frac{L\pm\sqrt{L^2+4}}{2} + \frac{2}{L\pm\sqrt{L^2+4}} = \frac{L\pm\sqrt{L^2+4}}{2} + \frac{2(L\mp\sqrt{L^2+4})}{-4} = \frac{L\pm\sqrt{L^2+4}}{2} + \frac{-L\pm\sqrt{L^2+4}}{2} = \pm\sqrt{L^2+4}$

Takže tady máme dvě řešení pro S_1.

Z toho lze odvodit rekurentní vztahy:

$S_n \cdot L = \left(x^n + \frac{1}{x^n}\right)\left(x - \frac{1}{x}\right) = x^{n+1} - \frac{1}{x^{n+1}} - x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}} = R_{n+1} - R_{n-1}$

$R_n \cdot L = \left(x^n - \frac{1}{x^n}\right)\left(x - \frac{1}{x}\right) = x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}} - \left(x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}\right) = S_{n+1} - S_{n-1}$

$R_n \cdot S_1 = \left(x^n - \frac{1}{x^n}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^{n+1} - \frac{1}{x^{n+1}} + x^{n-1} - \frac{1}{x^{n-1}} = R_{n+1} + R_{n-1}$

$R_{n+1} = S_1 \cdot R_n - R_{n-1}$

$R_{n+1} = \pm\sqrt{L^2+4} \cdot R_n - R_{n-1}$

Také

$S_n \cdot S_1 = \left(x^n + \frac{1}{x^n}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}} + x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}} = S_{n+1} + S_{n-1}$

$S_{n+1} = S_1 S_n - S_{n-1}$

Takže

$S_0 = 2$

$S_1 = \pm\sqrt{L^2+4}$

$S_2 = x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = L^2 + 4 - 2 = L^2 + 2$

$S_3 = S_1 S_2 - S_1 = S_1(S_2 - 1) = \pm\sqrt{L^2+4} \cdot (L^2 + 1)$

$S_4 = S_1 S_3 - S_2 = \pm\sqrt{L^2+4} \cdot \pm\sqrt{L^2+4}(L^2+1) - L^2 - 2 = (L^2+4)(L^2+1) - L^2 - 2 = L^4 + 4L^2 + 2$

$S_5 = S_1 S_4 - S_3 = \pm\sqrt{L^2+4} \cdot (L^4 + 4L^2 + 2) - \pm\sqrt{L^2+4} \cdot (L^2+1) = \pm\sqrt{L^2+4} \cdot (L^4 + 3L^2 + 1)$

…

Pak pro rozdíly ověříme také $R_2 = x^2 - \frac{1}{x^2} = \left(\frac{L \pm \sqrt{L^2+4}}{2}\right)^2 - \frac{1}{\left(\frac{L \pm \sqrt{L^2+4}}{2}\right)^2}$

$R_2 = \frac{2L^2 \pm 2L\sqrt{L^2+4}+4}{4} - \frac{2L^2 \mp 2L\sqrt{L^2+4}+4}{4} = \pm L\sqrt{L^2+4}$

Pak

$R_0 = 0$

$R_1 = L$

$R_2 = \pm L\sqrt{L^2+4}$

$R_3 = \pm\sqrt{L^2+4} \cdot R_2 - R_1 = L(L^2+4) - L = L^3 + 3L$

$R_4 = \pm\sqrt{L^2+4} \cdot (L^3+3L) - \pm L\sqrt{L^2+4} = \pm L\sqrt{L^2+4}(L^3+2L)$

$$R_5 = \pm\sqrt{L^2+4} \cdot \left(\pm L\sqrt{L^2+4}(L^3+2L)\right) - (L^3+3L) = (L^2+4)(L^3+2L) - (L^3+3L)$$
$$= L^5 + 5L^3 - 5L$$

…

Dále platí pro $x - \frac{1}{x} = L$ vztah pro n-tý člen

$S_n(L) = x^n + \frac{1}{x^n} = \left(\frac{L+\sqrt{L^2+4}}{2}\right)^n + \left(\frac{L-\sqrt{L^2+4}}{2}\right)^n$

$R_n(L) = x^n - \frac{1}{x^n} = \left(\frac{L+\sqrt{L^2+4}}{2}\right)^n - \left(\frac{L-\sqrt{L^2+4}}{2}\right)^n$

Ilustrační příklad

Nechť

$x - \frac{1}{x} = 3$

Určete

$x^3 + \frac{1}{x^3} = ?$

$x^3 - \frac{1}{x^3} = ?$

Výsledek

$S_3 = \pm\sqrt{L^2+4} \cdot (L^2+1) = \pm 10\sqrt{13}$

$R_3 = L^3 + 3L = 36$

Ověříme pomalým postupem

$x - \frac{1}{x} = 3$

$x^2 - 3x - 1 = 0$

$x = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$

$x^2 = \frac{22 \pm 6\sqrt{13}}{4} = 11 \pm 3\sqrt{13}$

$x^3 = \frac{1}{8}\left(3 \pm \sqrt{13}\right)\left(22 \pm 6\sqrt{13}\right) = \frac{1}{8}\left(66 + 78 \ \pm 22\sqrt{13} \pm 18\sqrt{13}\right) = \frac{1}{8}\left(144 \pm 40\sqrt{18}\right)$
$= 18 \pm 5\sqrt{13}$

$\frac{1}{x^3} = \frac{1}{18 \pm 5\sqrt{13}} = \frac{18 \mp 5\sqrt{13}}{-1} = -18 \pm 5\sqrt{13}$

$S_3 = x^3 + \frac{1}{x^3} = \pm 10\sqrt{13}$

$R_3 = x^3 - \frac{1}{x^3} = 36$

A ověříme i vztahy pro součet

$S_n(L) = x^n + \frac{1}{x^n} = \left(\frac{L + \sqrt{L^2 + 4}}{2}\right)^n + \left(\frac{L - \sqrt{L^2 + 4}}{2}\right)^n$

$S_3(3) = x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(\frac{3 + \sqrt{13}}{2}\right)^3 + \left(\frac{3 - \sqrt{13}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}\left[\left(3 + \sqrt{13}\right)^3 + \left(3 - \sqrt{13}\right)^3\right] = \frac{1}{8}(2 \cdot 3^3 + 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 13) = \frac{1}{8}(54 + 234) = \frac{288}{8} = 36$

A také pro rozdíl

$R_n(L) = x^n - \frac{1}{x^n} = \left(\frac{L + \sqrt{L^2 + 4}}{2}\right)^n - \left(\frac{L - \sqrt{L^2 + 4}}{2}\right)^n$

$R_3(3) = x^3 - \frac{1}{x^3} = \left(\frac{3 + \sqrt{13}}{2}\right)^3 - \left(\frac{3 - \sqrt{13}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}\left[\left(3 + \sqrt{13}\right)^3 - \left(3 - \sqrt{13}\right)^3\right] = \frac{1}{8}\left(3 \cdot 9\sqrt{13} + 13\sqrt{13}\right) = \frac{1}{8}\left(2 \cdot 40\sqrt{13}\right) = 10\sqrt{13}$

Příklady

Zadání jsem čerpal z Pinterestu a z různých zajímavých matematických úloh na internetu, ze zadání MO, aj.

Úlohy mají volnou návaznost na výše uvedené úvahy a postupy

1.

Na Pinterestu bylo chybně přepsané zadání z MO, ale i tak to lze řešit

$$x + 3 = \sqrt{x}$$

$$\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} = ?$$

Řešení:

Silou

$$y = \sqrt{x}$$

$$y^2 + 3 = y$$

$$y^2 - y + 3 = 0$$

$$y = \frac{1 \pm \sqrt{-11}}{2}$$

$$y + \frac{1}{y} = \frac{1 \pm \sqrt{-11}}{2} + \frac{2}{1 \pm \sqrt{-11}} = \frac{1 \pm \sqrt{-11}}{2} + \frac{1 \mp \sqrt{-11}}{6} = \frac{4 \pm 2\sqrt{-11}}{6} = \frac{2 \pm \sqrt{-11}}{3}$$

Zk.

$$y^2 = \frac{-10 \pm 2\sqrt{-11}}{4} = \frac{-5 \pm \sqrt{-11}}{2}$$

$$3 = \sqrt{x} - x = y - y^2 = \frac{1 \pm \sqrt{-11}}{2} - \frac{-5 \pm \sqrt{-11}}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

2.

To je původní zadání MO

$$x = 3 + \sqrt{8}$$

$$\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} = ?$$

Řešení – standard

Využijeme starou dobrou fintu

$$\frac{1}{3 + \sqrt{8}} = 3 - \sqrt{8}$$

$$\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} = A$$

$$x+\frac{1}{x}=A^2-2$$

$$A^2-2=3+\sqrt{8}+3-\sqrt{8}=6$$

$$A^2=8$$

$$A=\pm 2\sqrt{2}$$

3.

$$y-3\sqrt{y}-1=0$$

$$y^2+\frac{1}{y^2}=???$$

Řešení:

$$\frac{y}{\sqrt{y}}-3-\frac{1}{\sqrt{y}}=0$$

$$\frac{y}{\sqrt{y}}-\frac{1}{\sqrt{y}}=3$$

$$\sqrt{y}-\frac{1}{\sqrt{y}}=3$$

$$z=\sqrt{y}$$

$$z-\frac{1}{z}=3$$

$$z^2+\frac{1}{z^2}-2=9$$

$$y+\frac{1}{y}=11$$

$$y^2+\frac{1}{y^2}=119$$

4.

To také někdo špatně přepsal zadání MO na Pinterest, ale vyřešíme.

$$x=3+\sqrt{x}$$

$$\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}=???$$

Řešení silou

$$z=\sqrt{x}$$

$$z^2-z-3=0$$

$$z_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2} = \sqrt{x}$$

pak pouze pro kladné řešení

$$\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1+\sqrt{13}}{2} + \frac{2}{1+\sqrt{13}} = \frac{1+\sqrt{13}}{2} + \frac{2\left(-1+\sqrt{13}\right)}{12} = \frac{1+\sqrt{13}}{2} + \frac{-1+\sqrt{13}}{6}$$
$$= \frac{3+3\sqrt{13}}{6} + \frac{-1+\sqrt{13}}{6} = \frac{2+4\sqrt{13}}{6} = \frac{1+2\sqrt{13}}{3}$$

$$\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1+2\sqrt{13}}{3}$$

5.

$$7a + \frac{7}{a} = \sqrt{98}$$

$$a^{777} + \frac{1}{a^{777}} = ?$$

Řešení:

$$7a + \frac{7}{a} = \sqrt{2 \cdot 49} = 7\sqrt{2}$$

$$a + \frac{1}{a} = \sqrt{2}$$

$$a^2 + \frac{1}{a^2} = 0$$

$$a^4 = -1$$

$$a^{777} + \frac{1}{a^{777}} = a^1 \cdot a^{776} + \frac{1}{a^1 \cdot a^{776}} = a(\,a^4)^{194} + \frac{1}{a(\,a^4)^{194}} = a + \frac{1}{a} = \sqrt{2}$$

6.

$$x + \frac{1}{x} = -1$$

$$a^{88} + \frac{1}{a^{88}} = ?$$

Řešení – rovnice typu A.

$$88 = 3k + 1$$

$$a^{88} + \frac{1}{a^{88}} = -1$$

7.

$x^3 + y^3 = 10$

$x + y = 7$

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = ?$

$(x + y)^3 = 343 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = 10 + 3xy(x + y) = 10 + 21xy = 7^3 = 343$

$xy = \frac{333}{21} = \frac{111}{7}$

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{x + y}{xy} = \frac{7}{\frac{111}{7}} = \frac{49}{111}$

8.

Řešte v Z.

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{35}$

$x + y = ?$

Řešení v Z:

Možnosti

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{x + y}{xy} = \frac{2}{35} = \frac{2}{5 \cdot 7} = \frac{2}{-5 \cdot -7} = \frac{-2}{5 \cdot -7} = \frac{-2}{-5 \cdot 7}$

$x = \pm 5 \ a \ y = \pm 7$

A máme jediné řešení pro $y = -7$ a $x = 5$.

$x + y = -2$

Obecně jen parametricky

$y = t$

$x = \frac{35t}{2t-35}$

$x + y = \frac{2t^2}{2t-35}$

9.

$x^2 - 3x + 1 = 0$

$x^6 + \frac{1}{x^6} = ?$

Řešení:

$x - 3 + \frac{1}{x} = 0$

$x + \frac{1}{x} = 3$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = 7$$

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^3 = x^6 + \frac{1}{x^6} + 3x^2 + 3\frac{1}{x^2} = x^6 + \frac{1}{x^6} + 3\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = x^6 + \frac{1}{x^6} + 21 = 343$$

$$x^6 + \frac{1}{x^6} = 322$$

10.

$$x - 3\sqrt{x} + 1 = 0$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = ?$$

Řešení:

$$x = y^2$$

$$y^2 - 3y + 1 = 0$$

$$y - 3 + \frac{1}{y} = 0$$

$$y + \frac{1}{y} = 3$$

$$y^2 + \frac{1}{y^2} = 7$$

$$y^4 + \frac{1}{y^4} = 47$$

$$x^2 = y^4$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = 47$$

11.

Tady je jeden z oblíbených příkladů analytické geometrie – určení průsečíků kružnice a hyperboly.

$$x^2 + y^2 = 20$$

$$xy = -6$$

$$x - y = ?$$

Řešení:

$$x - y = A$$

$$(x - y)^2 = A^2 = x^2 - 2xy + y^2 = 20 + 12 = 32$$

$$A = \pm\sqrt{32} = \pm 4\sqrt{2}$$

12.

$x + y = 2$

$x^4 + y^4 = 1234$

$xy = ?$

$(x+y)^2 = 4 = x^2 + y^2 + 2xy$

$$\begin{aligned}(x+y)^4 = 16 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4 &= 2xy(2x^2 + 3xy + 2y^2) + 1234 \\ &= 2xy(2(\ x^2 + y^2) + 3xy) + 1234 = 2xy(2(4 - 2xy) + 3xy) + 1234 \\ &= 2xy(8 - xy) + 1234\end{aligned}$$

$2xy(8 - xy) + 1234 = 16$

$xy = z$

$16z - 2z^2 + 1218 = 0$

$z^2 - 8z - 609 = 0$

$$xy = z = \frac{8 \pm \sqrt{64 + 2436}}{2} = \frac{8 \pm 50}{2} = 29, -21$$

Dvě řešení

$K = \{-21{,}29\}$

A lze provést zkoušku?

Tak pro -21.

$x + y = 2$

$xy = -21$

$x - \frac{21}{x} = 2$

$x^2 - 2x - 21 = 0$

$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+84}}{2} = 1 \pm \sqrt{22}$

$y = \frac{-21}{1+\sqrt{22}} = \frac{-21(1-\sqrt{22})}{1-22} = 1 - \sqrt{22}$

$x^4 = \left(1 + \sqrt{22}\right)^4 = 1 + 4 \cdot \sqrt{22} + 6 \cdot 22 + 4 \cdot 22 \cdot \sqrt{22} + 22^2 = 617 + 92\sqrt{22}$

$y^4 = \left(1 - \sqrt{22}\right)^4 = 1 - 4 \cdot \sqrt{22} + 6 \cdot 22 - 4 \cdot 22 \cdot \sqrt{22} + 22^2 = 617 - 92\sqrt{22}$

$x^4 + y^4 = 1234$ a je to.

A pro 29 jdeme do komplexních čísel.

$x^2 - 2x + 29 = 0$

$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-116}}{2} = 1 \pm i\sqrt{28}$

$y = \frac{29}{1+i\sqrt{28}} = \frac{29(1-i\sqrt{28})}{1+28} = 1 - i\sqrt{28}$

$x^4 = \left(1 + i\sqrt{28}\right)^4 = 1 + 4i \cdot \sqrt{28} - 6 \cdot 28 - 4i \cdot 28 \cdot \sqrt{28} + 28^2 = 617 - 108i\sqrt{28}$

$y^4 = \left(1 - i\sqrt{28}\right)^4 = 1 + 4i \cdot \sqrt{28} + 6 \cdot 28 + 4 \cdot 28 \cdot \sqrt{28} + 28^2 = 617 + 108\sqrt{28}$

$x^4 + y^4 = 1234$ a je to.

13.

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = x + y = \sqrt{2}$$

$x^{2021} + y^{2021} =?$

První krok:

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = x + y$

$\frac{x+y}{xy} = x + y$

$xy = 1$

$y = \frac{1}{x}$

$x + \frac{1}{x} = \sqrt{2}$

$x^{2021} + \frac{1}{x^{2021}} =?$

$2021 = 43 \cdot 47$

Druhý krok:

Označme $K_n = x^n + \frac{1}{x^n}$

$K_1 = x + \frac{1}{x} = \sqrt{2}$

$K_2 = x^2 + \frac{1}{x^2} = 0$

a

$\left(x^n + \frac{1}{x^n}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}} + x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}$

Tedy máme

$K_{n+1} = \sqrt{2} \cdot K_n - K_{n-1}$

Kde

$K_1 = \sqrt{2}$

$K_2 = 0$

Pak posloupnost

$K = \{\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2}, -2, -\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}, 2, \sqrt{2}, 0, -\sqrt{2}, \dots\}$

Je periodická s periodou 8.

Tedy pro k = 1,2,3,…

$K_{8k} = 2$

$K_{8k+1} = \sqrt{2}$

$K_{8k+2} = 0$

$K_{8k+3} = -\sqrt{2}$

$K_{8k+4} = -2$

$K_{8k+5} = -\sqrt{2}$

$K_{8k+6} = 0$

$K_{8k+7} = \sqrt{2}$

A protože

$2021\ mod\ 8 = 5$

pak

$K_{2021} = -\sqrt{2}$

Zkusme jinak, pomocí komplexní algebry:

$x^2 - \sqrt{2}x + 1 = 0$

kořeny

$x_{1,2} = \frac{\sqrt{2} \pm i\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 \pm i) = cos\frac{\pi}{4} \pm i\ sin\frac{\pi}{4}$

A využijeme Moiavrovu větu

$x^{2021} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right)^{2021} = \left(cos\frac{\pi}{4} + i\ sin\frac{\pi}{4}\right)^{2021} = cos\frac{2021\pi}{4} + i\ sin\frac{2021\pi}{4} = cos\left(2\pi \cdot \frac{2016}{8} + \frac{5\pi}{4}\right) + i\ sin\left(2\pi \cdot \frac{2016}{8} + \frac{5\pi}{4}\right) = cos\frac{5\pi}{4} + i\ sin\frac{5\pi}{4} = -cos\frac{\pi}{4} - i\ sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1-i) = -x$

Takže

$x^{2021} + y^{2021} = x^{2021} + \frac{1}{x^{2021}} = -x + \frac{1}{-x} = -\left(x + \frac{1}{x}\right) = -\sqrt{2}$

$x^{2021} + y^{2021} = -\sqrt{2}$

14.

$x^2 - x + 1 = 0$

$x^{2015} - x^{2014} =?$

Tak tady přes komplexní čísla a Moivreovu větu:

$x_{1,2} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{3} \pm i\sin\frac{\pi}{3}$

$x^{2015} - x^{2014} = x^{2014}(x-1)$

$x^{2014} = \left(\cos\frac{\pi}{3} \pm i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{2014} = \cos\frac{2014\pi}{3} \pm i\sin\frac{2014\pi}{3} = \cos\frac{4\pi}{3} \pm i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} \mp i\frac{\sqrt{3}}{2}$

protože

$2014\pi = 3 \cdot 335 \cdot 2\pi + 4\pi$

$x^{2015} - x^{2014} = x^{2014}(x-1) = \left(-\frac{1}{2} \mp i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1$

15.

$a^2 - b^2 = 9$

$a \cdot b = 3$

$a + b = ?$

To je podivná úloha. Zkoušel jsem to sofistikovaně, a nic. Tak řešení – tady silou:

$b^2 = \frac{9}{a^2}$

$a^2 - \frac{9}{a^2} = 9$

$a^4 - 9a^2 - 9 = 0$

$a^2 = \frac{9 \pm \sqrt{81+36}}{2} = \frac{9 \pm \sqrt{117}}{2}$

$b^2 = \frac{9 \cdot 2}{9 \pm \sqrt{117}} = 18\frac{9 \mp \sqrt{117}}{-36} = \frac{\pm\sqrt{117} - 9}{2}$

Jen kladná řešení.

$a^2 - b^2 = 9$

$a^2 + b^2 = \sqrt{117}$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + b^2 + 6 = \sqrt{117} + 6$

$a + b = \sqrt{6 + \sqrt{117}} = \sqrt{6 + 3\sqrt{13}} = \sqrt{3}\left(\sqrt{2 + \sqrt{13}}\right)$

16.

$x + \frac{1}{y} = y - \frac{1}{x} = 1$

$(xy)^9 - \frac{1}{(xy)^9} = ?$

Zkusme silou:

$x + \frac{1}{y} = 1$

$y = 1 + \frac{1}{x}$

$x + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = 1$

$x + \frac{x}{x+1} = 1$

$x(x+1) + x = x + 1$

$x^2 + x - 1 = 0$

$x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

$y = 1 + \frac{1}{x} = 1 + \frac{2}{-1 \pm \sqrt{5}} = 1 + 2\frac{-1 \mp \sqrt{5}}{1-5} = 1 + \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$

$xy = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \cdot \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} = \frac{-3+5 \pm 2\sqrt{5}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} = \varphi$

Takže zadáni lze přepsat na

$F_9 = \varphi^9 - \frac{1}{\varphi^9} =?$

a z předchozího máme

$F_{n+1} = \sqrt{5}F_n - F_{n-1}$

$F_1 = 1$ a $F_2 = \sqrt{5}$

$\boldsymbol{F} = \{\mathbf{1}, \sqrt{5}, \mathbf{4}, 3\sqrt{5}, \mathbf{11}, 8\sqrt{5}, \mathbf{29}, \mathbf{21\sqrt{5}}, \mathbf{76}, \dots\}$

$F_9 = \varphi^9 - \frac{1}{\varphi^9} = 76$

$(xy)^9 - \frac{1}{(xy)^9} = 76$

A zkusme jinak pro ověření:

$F_9 = \varphi^9 - \frac{1}{\varphi^9} = 34\varphi + 21 - \frac{1}{34\varphi+21} = 34\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + 21 - \frac{1}{34\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)+21} = 17 + 17\sqrt{5} + 21 - \frac{1}{17+17\sqrt{5}+21} = 38 + 17\sqrt{5} - \frac{1}{38+17\sqrt{5}} = 38 + 17\sqrt{5} - \frac{38-17\sqrt{5}}{1444-1445} = 38 + 17\sqrt{5} + 38 - 17\sqrt{5} = 76$

17.

Určete x, y

$x + \sqrt{y} = x^2$

$x - \sqrt{y} = x^3$

Řešení:

$\sqrt{y} = x^2 - x = x - x^3$

$x^3 + x^2 - 2x = 0$

$x(x^2 + x - 2) = 0$

Pro nulu splněno.

$x^2 + x - 2 = 0$

$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = -2{,}1$

A zkouška

$x = 1$

$y = ((1)^2 - 1)^2 = 0$

$1 + \sqrt{0} = 1$ vyhovuje

$x = -2$

$y = ((-2)^2 + 2)^2 = 36$

$-2 + \sqrt{36} = (-2)^2$ vyhovuje

$-2 - \sqrt{36} = -8 = (-2)^3$ vyhovuje

$K = \{[-2{,}36], [0{,}0], [1{,}0]\}$

18.

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 2$$

$3^a = 5^b = ?$

Řešení:

$3^a = 5^b = K$

$$b = a \cdot \frac{\ln 3}{\ln 5} = a \cdot R$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{aR} = 2$$

$$\frac{R+1}{aR} = 2$$

$$\frac{R+1}{2R} = a$$

$$\frac{R+1}{2} = b$$

$$3^a = 5^b = 3^{\frac{R+1}{2R}} = 5^{\frac{R+1}{2}} = K$$

$$R = \frac{\ln 3}{\ln 5}$$

$$K = 5^{\frac{1+\frac{\ln 3}{\ln 5}}{2}}$$

$$\ln K = \frac{1 + \frac{\ln 3}{\ln 5}}{2} \cdot \ln 5$$

$2 \ln K = \ln 5 + \ln 3 = \ln 15$

$\ln K = \ln \sqrt{15}$

$K = \sqrt{15}$

$3^a = 5^b = \sqrt{15}$

19.

Pokud

$$b^4 + \frac{1}{b^4} = 4$$

určete

$$b^3 + \frac{1}{b^3} = ?$$

Řešení:

Těžké je najít optimální postup řešení, tak zkusme:

$b + \frac{1}{b} = K$

$b^2 + \frac{1}{b^2} = K^2 - 2$

$b^3 + \frac{1}{b^3} = K^3 - 3K = K(K^2 - 3)$

$b^4 + \frac{1}{b^4} = (K^2 - 2)^2 - 2 = 4$

$(K^2 - 2)^2 = 6$

$K^2 = 2 \pm \sqrt{6}$

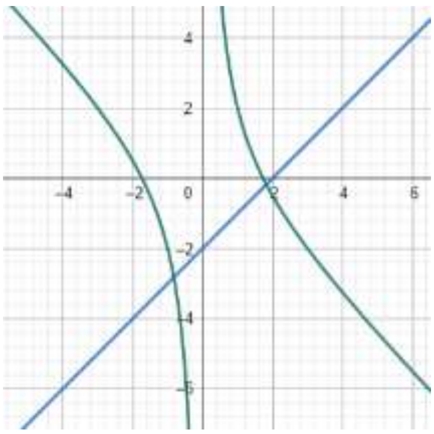
v reálných číslech jen kladné řešení

$K^2 = 2 + \sqrt{6}$

$b^3 + \frac{1}{b^3} = K(K^2 - 3) = \pm\sqrt{2 + \sqrt{6}} \cdot \left(\sqrt{6} - 1\right) = \pm\sqrt{\left(2 + \sqrt{6}\right)\left(\sqrt{6} - 1\right)^2} =$
$\pm\sqrt{\left(2 + \sqrt{6}\right)\left(7 - 2\sqrt{6}\right)} = \pm\sqrt{14 - 12 + 7\sqrt{6} - 4\sqrt{6}} = \pm\sqrt{2 + 3\sqrt{6}}$

20.

V analytické geometrii máme obecnou hyperbolu a přímku



$x^2 + xy = 3$

$x - y = 2$

$x + y = ?$

Řešení:

$x(x + y) = 3$

$x + y = \frac{3}{x}$

$y = x - 2$

$x^2 + x(x - 2) = 3$

$2x^2 - 2x - 3 = 0$

$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+24}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{2}$

Takže

$x + y = \frac{6}{1 \pm \sqrt{7}} = \frac{6(1 \mp \sqrt{7})}{-6} = \pm\sqrt{7} - 1$

nebo

$x + y = x + x - 2 = 2x - 2 = 2\,\frac{1 \pm \sqrt{7}}{2} - 2 = -1 \pm \sqrt{7}$

Ověření:

$x^2 = \frac{8 \pm 2\sqrt{7}}{4} = \frac{4 \pm \sqrt{7}}{2}$

$xy = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{2} \cdot \frac{-3 \pm \sqrt{7}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{7}}{4} = \frac{2 \mp \sqrt{7}}{2}$

$x^2 + xy = \frac{4 \pm \sqrt{7}}{2} + \frac{2 \mp \sqrt{7}}{2} = 3$

21.

$a + b = 1$

$a^2 + b^2 = 9$

$a^4 + b^4 = ?$

Řešení sofistikovaně

$(a^2 + b^2)^2 = a^4 + 2a^2b^2 + b^4 = 81$

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = 9 + 2ab = 1$

$ab = -4$

$(ab)^2 = 16$

$a^4 + 2 \cdot 16 + b^4 = 81$

$a^4 + b^4 = 81 - 32 = 49$

a také to lze zkusit to silou:

$b = 1 - a$

$a^2 + (1 - a)^2 = 9$

$2a^2 - 2a - 8 = 0$

$a^2 - a - 4 = 0$

$$a = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$b = \frac{1 \mp \sqrt{17}}{2}$$

$$a^2 = \frac{18 \pm 2\sqrt{17}}{4} = \frac{9 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$b^2 = \frac{9 \mp \sqrt{17}}{2}$$

$$a^4 = \frac{98 \pm 18\sqrt{17}}{4} = \frac{49 \pm 9\sqrt{17}}{2}$$

$$b^4 = \frac{49 \mp 9\sqrt{17}}{2}$$

$$a^4 + b^4 = \frac{2 \cdot 49}{2} = 49$$

22.

Určete x a y

$$x - y = 31$$

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 31$$

nebo

$$x - y = 17$$

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 17$$

nebo

$$x - y = 11$$

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 11$$

Obecné řešení

$$x - y = A$$

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = A$$

$$\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right) = A\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right) = A$$

$$\sqrt{x} - \sqrt{y} = 1$$

$$\sqrt{y} = \sqrt{x} - 1$$

$$\sqrt{x} + \sqrt{x} - 1 = A$$

$$\sqrt{x} = \frac{A + 1}{2}$$

$$x = \left(\frac{A+1}{2}\right)^2$$

$$y = x - A = \left(\frac{A+1}{2}\right)^2 - A = \frac{A^2 + 2A + 1 - 4A}{4} = \left(\frac{A-1}{2}\right)^2$$

23.

Řešte x, y

$$x - y = 95 = 5 \cdot 19$$

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 19$$

Obecně

$$x - y = kA$$

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = A$$

$$\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right) = kA$$

$$\sqrt{x} - \sqrt{y} = k$$

$$\sqrt{y} = \sqrt{x} - k$$

$$\sqrt{x} + \sqrt{x} - k = A$$

$$\sqrt{x} = \frac{A+k}{2}$$

$$x = \left(\frac{A+k}{2}\right)^2$$

$$y = \left(\frac{A-k}{2}\right)^2$$

Pak pro A=19 a k=5 je x=144 a y=49.

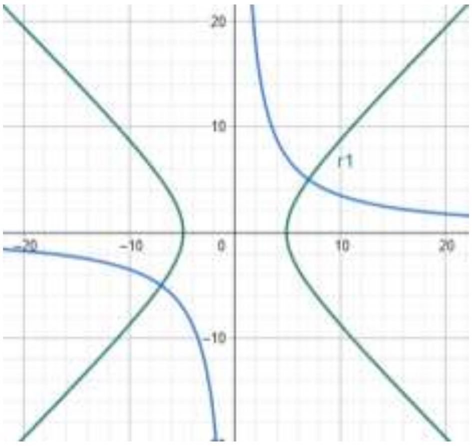
24.

A tady máme v analytické geometrii průsečík dvou hyperbol.

$$x^2 - y^2 = 24$$

$$xy = 35$$

$$x + y = ?$$



Řešení:

$x^2 - \left(\frac{35}{x}\right)^2 = 24$

$x^4 - 24x^2 - 35^2 = 0$

$y^2 - 24y - 35^2 = 0$

$y_{1,2} = \frac{24 \pm \sqrt{24^2 + 4 \cdot 35^2}}{2} = \frac{24 \pm \sqrt{5476}}{2} = \frac{24 \pm 74}{2} = -25; 49$

$x^2 = 49$

$x = \pm 7$

$y = \pm 5$

A pokud budeme uvažovat i komplexní řešení:

$x^2 = -25$

$x = \pm i5$

$y = \mp i7$

A obecně

$x^2 - y^2 = A$

$xy = B$

$x + y = ?$

Klasicky

$y = \frac{B}{x}$

$x^2 - \frac{B^2}{x^2} = A$

$x^4 - Ax^2 - B^2 = 0$

$D = A^2 + 4B^2$

$x^2 = \frac{A \pm \sqrt{D}}{2}$

$x = \pm\sqrt{\frac{A \pm \sqrt{D}}{2}}$ a je možné i komplexní řešení.

$y = \frac{B}{x}$

25.

$a + b = 10$

$ab = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = ?$

Řešení:

$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab} = \frac{10}{\frac{1}{2}} = 20$

Závěr

V žádném případě text v tomto článku nepřesahuje rámec středoškolské matematiky. Snad uvedená řešení či náčrty řešení čtenáři pomohou v orientaci ve standardních úlohách. Úlohy jsem kontroloval, ale přesto, pokud se tam vyskytla chyba nebo překlep, budu se ke článku občas vracet a případné nedostatky odstraním.